



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Algebras cuasi-Jordan y su relación con las álgebras de Leibniz

T E S I S

Que para obtener el grado de
Doctor en Ciencias

con Orientación en
Matemáticas Básicas

P r e s e n t a
Raúl Eduardo Velásquez Ossa

Director de Tesis:

Dr. Lázaro Raúl Felipe Parada

Guanajuato, Gto. Septiembre de 2007



CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Algebras cuasi-Jordan y su relación con las álgebras de Leibniz

T E S I S

Que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con Orientación en

Matemáticas Básicas

P r e s e n t a

Raúl Eduardo Velásquez Ossa

Comité de Evaluación:

Dr. Fausto Antonio Ongay Larios
(Presidente)

Dr. Pedro Luís del Ángel Rodríguez
(Secretario)

Dr. Gil Salgado González
(Vocal)

Dr. Jorge Estrada Sarlabous
(Vocal)

Dr. Lázaro Raúl Felipe Parada
(Vocal y director de Tesis)

Guanajuato, Gto. Septiembre de 2007

A la memoria de un excelente padre, un maravilloso abuelo
y un incomparable suegro,

Félix Botero Henao

A mis tres grandes tesoros,

mi esposa Luz Stella y mis princesas Manuela y Laura.

Álgebras cuasi-Jordan y su relación con las álgebras de Leibniz

Raúl Eduardo Velásquez Ossa

26 de septiembre de 2007

Agradecimientos

Aunque en apariencia decir gracias es muy fácil, en realidad no lo es. Pronunciarlas o escribirlas podrá ser fácil, pero transmitir el agradecimiento desde la esencia misma del ser humano es algo diferente, y eso es lo que me motiva a escribir estas líneas.

En este sentido es que debo admitir que debo dar gracias a muchas personas, no sólo a las personas que me acompañaron en todo momento, sino también a aquellas que con una simple sonrisa o un cordial saludo me motivaron a seguir adelante y a sentir que podría lograr el éxito que hoy alcancé.

Primero que todo debo dar gracias a Dios por su apoyo constante, por brindarme la posibilidad de alcanzar este sueño, por permitirme encontrar en mi camino tantas personas buenas que hicieron de mí una mejor persona y por darme la capacidad para resolver los problemas que se me presentaron de la mejor manera posible.

Debo darle gracias a Dios por todo lo que me ha dado, en especial por mi hermosa familia: mi bella esposa Luz Stella, y mis adorables hijas Manuela y Laura, quienes son mi gran motivación para seguir adelante en los momentos difíciles.

A mis tres tesoros, Luz Stella, Manuela y Laura, les doy gracias infinitas por su amor, su apoyo incondicional, su fe en mí, su constante compañía, su paciencia para soportar mi mal genio, su fortaleza para ayudarme en los momentos difíciles y su sacrificio al acompañarme en esta aventura. A ellas les debo gran parte de este logro, y sin ellas él mismo no tendría sentido.

Agradezco desde la distancia a mi madre, a mi hermano Juan, a mí cuñada Diana y a mis hermosos sobrinos Santiago, Carolina y Juan José, por su constante apoyo, su amor y su fe inquebrantable en mí. Además de ellos agradezco a toda mi familia materna por su voz de aliento en cada momento y por siempre poder contar con ellos, al igual que a Carlos Alberto y sus hijos.

Sería imperdonable no agradecer a mis suegros Félix y Stella por todo su amor y apoyo a lo largo de este período y durante todo el tiempo en que he podido compartir mi vida con su hija. A Félix, que más que un suegro era un padre para mí, dedico una oración a su memoria ya que no podré darle lo que más anhelaba, el regreso a su lado de su querida hija y de sus amadas nietas. Gracias Dios por permitirme compartir

con él parte de su vida y tener su amor.

De igual manera le agradezco a las familias Ramírez y Botero por todo el cariño que me han brindado.

Luego de agradecer a mis familiares, debo agradecer a todas aquellas personas de las cuales recibí desde las más pequeñas muestras de apoyo hasta aquellas que en ocasiones me dieron la mano para seguir adelante. No quisiera dejar a nadie sin darle las gracias, pero como humano sé que algunos escaparán a mi memoria y que algunos otros quedarán opacados por aquellos que brillaron con mayor intensidad. A ellos le reitero mi agradecimiento y les doy una disculpa por no incluirlos.

La vida me ha dado la fortuna de tener innumerables amigos, muchos de los más queridos los he encontrado en México durante esta estancia, y les agradezco a todos ellos la amistad que me brindaron. Es difícil como siempre nombrarlos porque existe la posibilidad de cometer una grave omisión, pero es imposible no nombrar aquellos de los cuales se recibió tanto aprecio que se quedarán por siempre en nuestro corazón. Pidiendo perdón por las posibles omisiones, le agradezco a Yamitd, Isabel, Antonio, Jair , Víctor López y Eloisa por todo lo compartido y, en especial, por el amor que le brindaron a mis tres tesoros y el apoyo en los momentos difíciles que tuvimos por la triste pérdida de Félix. A Juan Carlos, Víctor Pérez, Ángel, Porfirio, Mary Carmen, Isabelie, Laura, Geiser, Claudia, Oyuki, Sergio, Carlos, Francisco y todos aquellos que nos brindaron su compañía y amistad. A Alma por todo el cariño que nos dió y a Lalo por su compañía y la de su familia.

Es imposible no dar gracias a los investigadores del CIMAT por la enseñanzas y el apoyo recibidos durante este tiempo. En primer lugar a mi asesor Raúl Felipe por el apoyo recibido para que pudiera llegar al CIMAT, culminar este trabajo y poder lograr mi Doctorado. Gracias Raúl por lo aprendido, por los buenos momentos, y por que no, por los malos momentos compartidos durante estos tres años de aprendizaje y superación.

A Fausto y Pedro Luis, quienes desde el mismo momento en que surgió la idea de hacer un doctorado apoyaron este sueño y en todo momento me brindaron su mano para seguir adelante hasta el último momento, les doy mi gratitud eterna. A Fausto y Helga les doy las gracias de nuestra familia por el apoyo recibido en el difícil momento que pasamos.

A Helga, Luis Hernández, Adolfo, Herbert, Stephen y todos aquellos investigadores que en su momento recibí su apoyo, muchísimas gracias.

A todo el personal administrativo del CIMAT quienes hicieron posible que mi estancia acá fuera la mejor y que me brindaron su apoyo cuando lo requerí, les agradecemos desde lo más profundo de nuestro corazón, en especial a Lourdes, Jannet, Lolita, Adriana, Rafael, Ricardo, Manuel, Mariano, José, Lucha, Odal, Doña Mary, Irma, Toquina y Rufina.

Aunque hace parte del personal administrativo y de apoyo del CIMAT, una parte muy importante de nuestro agradecimiento está dedicado al ángel que Dios nos dió como amiga: Fina. No alcanzan las palabras para darte las gracias por todo lo que nos brindaste, aún desde antes de que llegáramos a Guanajuato, sólo podemos retribuirte con nuestro amor y agradecimiento eterno.

Debo agradecer a Veva y Vicente de la Famat por su amistad, pero muy especialmente a Rubén y su familia por todo la compañía, la amistad recibida y el apoyo en los momentos difíciles.

Siempre que se da inicio a una etapa de la vida en un lugar distinto, encontramos personas que hacen de este lugar nuestra casa y en ese sentido les damos toda nuestra gratitud a Gonzalo y Maria Luisa, a sus hijos Gonzalo e Isamar, a Martha, Armando y sus hijos. No puedo olvidar al Dr. Antonio Blanco y a nuestros amigos de León, Don Hugo, Doña Gloria y su familia.

Les doy mi agradecimiento por su amistad y cariño a aquellos que se nos adelantaron en el camino y que por siempre vivirán en nuestra memoria: Félix, Gustavo y el Loco.

Por último, debo expresar mi agradecimiento a las instituciones que apoyaron mis estudios de Doctorado: la Universidad de Antioquia y el CIMAT por el apoyo recibido durante estos tres años, y al CONACYT por la beca recibida en el último semestre.

Introducción

El presente trabajo está dirigido a introducir una nueva estructura algebraica que generaliza el concepto de álgebra de Jordan, las llamadas *álgebras cuasi-Jordan*, y mostrar algunas de sus propiedades, en particular su relación con las álgebras de Leibniz y las diálgebras.

La motivación para definir el concepto de álgebra cuasi-Jordan surge de encontrar una generalización de las álgebras de Jordan para la cual se cumplieran relaciones análogas a las existentes entre álgebras asociativas, de Lie y de Jordan, pero con respecto a las diálgebras y las álgebras de Leibniz.

A partir de esta idea comenzamos el estudio de las álgebras de Leibniz, las diálgebras y las álgebras de Jordan, en busca del concepto adecuado y de sus propiedades.

Para comenzar digamos que las álgebras de Leibniz son una generalización de las álgebras de Lie, introducidas inicialmente por A. Bloch en 1965 (ver [5]) con el nombre de D -álgebras, pero que no alcanzaron trascendencia en esa época. Entre finales de 1980 y principios de 1990, J. L. Loday introduce nuevamente el concepto de álgebra de Leibniz, nombre con el que se conocen hoy en día, y fué a partir de sus trabajos que este concepto tomó fuerza entre los matemáticos.

La aplicabilidad de las álgebras de Leibniz en el contexto de las teorías de homología y cohomología permitió que éstas se desarrollaran rápidamente en esta área.

Teniendo en cuenta la relación existente entre las álgebras de Lie y las álgebras asociativas, Loday introduce la noción de álgebra diasociativa, mejor conocida con el nombre de diálgebra. Loday prueba que la relación functorial existente entre las álgebras asociativas y las álgebras de Lie se traslada al contexto de las álgebras de Leibniz y las diálgebras. Más aún, muestra que el diagrama de categorías y funtores entre estas cuatro estructuras es conmutativo.

Esto muestra que existe una nueva clase de estructuras algebraicas que generaliza algunas de las estructuras clásicas, como por ejemplo el concepto de diálgebra alternativa.

El proceso en que venían desarrollandose estas nuevas estructuras mostraba que era interesante estudiarles por sí mismas, además de que ellas tenían bastantes apli-

caciones, tal como sucede con las diálgebras las cuales están ligadas al concepto de árbol binario.

De otro lado, están las álgebras de Jordan, las cuales fueron introducidas por Pascual Jordan alrededor de 1930 en su búsqueda de un conjunto de axiomas que permitieran dar una estructura algebraica a los fundamentos de la mecánica cuántica. Aunque las álgebras de Jordan no cumplieron este objetivo, la estructura fué de gran interés para los matemáticos y se dio un gran desarrollo en esta teoría, la cual fue liderada inicialmente por A. A. Albert y N. Jacobson, y luego seguida por numerosos matemáticos, entre los cuales se destacan K. McCrimmon, O. Loos, I. Kantor, E. Zelmanov, entre otros.

De igual modo, se conocía desde el surgimiento mismo de las álgebras de Jordan, que toda álgebra asociativa generaba un álgebra de Jordan. En un artículo de A. Albert se muestra que existen álgebras de Jordan que no son isomorfas a un álgebra de Jordan definida por un álgebra asociativa, lo cual es válido para las álgebras de Lie por medio de la llamada álgebra envolvente universal.

A principios de 1960 aparecieron en forma independiente los trabajos de J. Tits, M. Koecher y I. Kantor, en los cuales se mostraba que las álgebras de Jordan estaban ligadas a las álgebras de Lie. En particular, estos trabajos mostraron que toda álgebra de Jordan estaba inmersa en un álgebra de Lie, en particular en las llamadas álgebras de Lie tres graduadas.

Lo anterior quiere decir que dada cualquier álgebra de Jordan podemos construir un álgebra de Lie de modo que el producto de Jordan se puede recuperar del corchete de Lie definido y que el álgebra de Jordan es una subálgebra (abeliana) del álgebra de Lie. Esta construcción, conocida como la construcción TKK, permitió, entre otras cosas, proporcionar modelos de álgebras de Lie excepcionales de las cuales hasta ese momento sólo se conocía su existencia a partir de sus matrices de Cartan.

Teniendo en cuenta todo lo anterior y que se han definido las generalizaciones de las álgebras de Lie y de las álgebras asociativas, las álgebras de Leibniz y las diálgebras, surge de manera inmediata la pregunta:

¿ Existe una generalización de las álgebras de Jordan, la cual tenga propiedades con respecto a las álgebras de Leibniz y las diálgebras, similares a las existentes entre las álgebras asociativas, de Jordan y de Lie?

A partir de ese punto se iniciamos la búsqueda de una estructura que respondiera a la pregunta planteada. En este contexto es que surge la noción de álgebra cuasi-Jordan.

Como las álgebras de Jordan surgen a partir del producto de Jordan sobre álgebras asociativas, la definición de álgebra cuasi-Jordan surge de manera natural al extender

el producto de Jordan a las diálgebras, es decir con el producto \triangleleft definido por

$$a \triangleleft b := \frac{1}{2}(a \dashv b + b \vdash a),$$

para todo a, b en una diálgebra D definida sobre un campo de característica diferente de dos.

Esta extensión nos permitió, junto con otros productos definidos de diferente manera, encontrar la definición que correspondía a la generalización buscada.

Las álgebras cuasi-Jordan presentan propiedades con respecto a las álgebras de Jordan, similares a las existentes entre álgebras de Leibniz y de Lie, como por ejemplo el hecho de que podemos contruir álgebras cuasi-Jordan a partir de una clase especial de álgebras de Leibniz.

Para terminar esta introducción, mostraremos como está organizada esta tesis. Este trabajo lo hemos dividido en cinco capítulos, distribuidos de la siguiente manera:

En el primer capítulo presentamos los resultados básicos más relevantes desde el punto de vista algebraico de las álgebras de Leibniz, las diálgebras y las álgebras de Jordan. Este primer capítulo está dividido en 5 secciones y los resultados contenidos en ellas se presentarán sin demostración en general.

En la primera sección presentamos el concepto de álgebra de Leibniz, damos algunos ejemplos, mostramos su relación con las álgebras de Lie y las caracterizamos.

En la segunda sección presentamos algunos resultados conocidos sobre diálgebras, especialmente su caracterización vía módulos sobre álgebras asociativas.

Para la tercera sección, presentamos la relación existente entre álgebras de Leibniz, de Lie, asociativas y diálgebras. En particular, se prueba que existe un diagrama conmutativo de categorías y funtores para estas cuatro estructuras.

La siguiente sección, está dedicada a las álgebras de Jordan. En esta parte presentamos los resultados correspondientes a la asociatividad en potencias de las álgebras de Jordan, estudiamos la representación cuadrática y caracterizamos los elementos inversos.

Finalmente, la quinta y última sección de este primer capítulo está dedicada a la construcción TKK dada por M. Koecher. En esta sección, básicamente se mostrará que toda álgebra de Jordan está inmersa en un álgebra de Lie.

En el capítulo 2 presentamos algunos resultados que obtuvimos sobre diálgebras. En particular, caracterizamos el conjunto de unidades barra y estudiaremos las diálgebras separables.

Este capítulo consta de dos secciones y en la primera de ellas se presenta la relación existente entre los ideales D^{ann} y $Z_B(D)$. Además, se caracteriza el conjunto de

unidades barra vía el ideal D^{ann} . A partir de esto se presenta la noción de elementos regulares y se estudian algunas de sus propiedades.

En la segunda sección se introducen las diálgebras separables y se prueban algunos resultados. En particular, se resuelve el problema de adicionar unidades barra para este tipo de diálgebras.

En el tercer capítulo introducimos finalmente las álgebras cuasi-Jordan. Esta definición se presenta a partir del estudio del producto de Jordan sobre diálgebras, y a partir de ahí se introducen varios ejemplos, se generalizan algunas nociones clásicas de la teoría de álgebras de Jordan y se prueban varios resultados que muestran los elementos más relevantes de esta nueva estructura.

Este capítulo está dividido en 6 secciones y se inicia introduciendo la definición formal de álgebra cuasi-Jordan en la primera sección.

En la sección dos se presentan varios ejemplos, introducimos el ideal anulador, el cual es un elemento central en el desarrollo de la teoría, presentamos la relación entre las álgebras de Jordan y las álgebras cuasi-Jordan, y comparamos estas últimas con las álgebras de Jordan no conmutativas.

En la tercera sección introducimos las unidades a derecha y caracterizamos el conjunto que ellas forman. Además, mostramos cómo es el ideal anulador sobre álgebras cuasi-Jordan unitales.

La siguiente sección está dedicada a introducir la clase de álgebras cuasi-Jordan separables. En esta parte se prueba que toda álgebra cuasi-Jordan es isomorfa a una separable y mostramos un proceso estándar para adicionar unidades a derecha en esta clase de álgebras.

La quinta sección tiene como objetivo central extender el concepto de elemento invertible de la teoría de álgebras de Jordan al contexto de las álgebras cuasi-Jordan. Además, se introduce la representación cuadrática generalizada y se prueban algunas de sus propiedades.

En la última sección de este capítulo se estudian los conceptos de derivación a izquierda y derivación a derecha. A partir de ellos se muestra que existen derivaciones internas y derivaciones a izquierda internas en álgebras cuasi-Jordan generadas por diálgebras, lo cual permite introducir el concepto de *diderivación* y construir un álgebra de Leibniz de diderivaciones internas.

El capítulo 4 está dedicado a mostrar que es posible construir álgebras cuasi-Jordan a partir de álgebras de Leibniz que contengan un elemento Q-Jordan, es decir en elemento con índice de nilpotencia a lo sumo 3, y a mostrar la relación que existe entre estos elementos y la noción de ideal interno sobre álgebras de Leibniz. Además, se muestran algunas propiedades de las álgebras cuasi-Jordan construidas.

Este capítulo consta de 4 secciones y en la primera se estudian elementos ad-nilpotentes sobre álgebras de Leibniz, se define el concepto de elemento Q-Jordan y se prueban algunas de las propiedades que cumple el operador adjunto.

La segunda sección muestra cómo se construye el álgebra cuasi-Jordan L_x , donde L es un álgebra de Leibniz y x es un elemento Q-Jordan.

La tercera sección está dedicada a mostrar propiedades del álgebra L_x , como condiciones necesarias y suficientes para la existencia de unidades a derecha.

En la última sección de este capítulo se introduce la noción de ideal interno sobre álgebras de Leibniz y se estudia su relación con elementos Q-Jordan.

El quinto y último capítulo de esta tesis está dedicado a las conclusiones. En este capítulo se hace un resumen de los principales resultados obtenidos a lo largo de la tesis y se proponen nuevos problemas de investigación.

Índice general

Introducción	v
1. Preliminares	1
1.1. Álgebras de Leibniz	2
1.2. Diálgebras	7
1.3. La relación functorial	11
1.4. Álgebras de Jordan	13
1.5. La construcción TKK	20
2. Algunos resultados sobre diálgebras	25
2.1. Unidades barra y elementos regulares en diálgebras	25
2.2. Diálgebras separables	30
3. Álgebras cuasi-Jordan	37
3.1. Surgimiento de las Álgebras cuasi-Jordan	38
3.2. Ejemplos y propiedades de álgebras cuasi-Jordan	40
3.3. Unidades a derecha y los ideales \mathfrak{S}^{ann} y $Z^r(\mathfrak{S})$	45
3.4. Álgebras cuasi-Jordan que se separan sobre ideales	46
3.5. Elementos invertibles en álgebras cuasi-Jordan	52
3.6. Derivaciones sobre álgebras cuasi-Jordan	58
4. El álgebra cuasi-Jordan L_x	65
4.1. Elementos ad-nilpotentes y Q-Jordan	65
4.2. El álgebra cuasi-Jordan L_x	69
4.3. Algunas propiedades del álgebra L_x	74
4.4. Ideales internos en álgebras de Leibniz	77
5. Conclusiones	79
Bibliografía	83

Capítulo 1

Preliminares

Este primer capítulo es una breve introducción a la teoría de las álgebras de Leibniz, las diálgebras, las álgebras de Jordan y la construcción TKK.

En este sentido, en la primera parte presentaremos algunos de los resultados básicos de la teoría de las álgebras de Leibniz y de las diálgebras, así como la relación existente entre estas estructuras.

De otro lado, la segunda parte de este capítulo está dedicado a las álgebras de Jordan y la construcción TKK. Específicamente, mostraremos algunas de las propiedades básicas de la teoría de las álgebras de Jordan tales como la asociatividad en potencias y las propiedades de elementos inversos vía la representación cuadrática. Además, repasaremos la construcción TKK, la cual permite ver que las álgebra de Jordan están inmersas en las álgebras de Lie.

Este capítulo está dividido en 5 secciones. En la primera hacemos una breve introducción a las álgebras de Leibniz, mostramos algunas de sus propiedades y estudiamos la relación existente con las álgebras de Lie.

En la segunda sección estudiamos las diálgebras, su relación con las álgebras asociativas y su caracterización vía módulos.

La tercera sección está dedicada a mostrar la relación functorial existente entre las categorías de las álgebras asociativas, de Lie, de Leibniz y de las diálgebras.

La siguiente sección está dedicada a introducir las álgebras de Jordan, estudiar la importancia de la representación cuadrática y las nociones de unidad e inverso.

En la quinta y última sección de este capítulo, mostraremos la construcción TKK, comenzando con la caracterización de las derivaciones sobre álgebras, lo cual será de utilidad en el capítulo 3.

1.1. Álgebras de Leibniz

En esta sección introduciremos la noción de álgebra de Leibniz y mostraremos algunos ejemplos y resultados básicos sobre esta estructura. En particular, estudiaremos su relación con las álgebras de Lie y desarrollaremos el concepto de ideal anulador para las álgebras de Leibniz.

Las álgebras de Leibniz surgen de manera natural en los trabajos de J. L. Loday en K -teoría (ver [28] y [30]). En particular, su motivación fué la búsqueda de una *obstrucción* a la periodicidad de la K -teoría algebraica, la cual no satisface los teoremas de periodicidad de Bott válidos para la versión topológica.

La definición del concepto de álgebra de Leibniz dado por J. L. Loday surge de la siguiente forma:

El complejo cadena de Chevalley-Eilenberg de un álgebra de Lie \mathcal{G} es la sucesión de cadenas de módulos dadas por las potencias exteriores $\wedge^* \mathcal{G}$ y el operador de frontera $d : \wedge^n \mathcal{G} \rightarrow \wedge^{n-1} \mathcal{G}$ definido clásicamente como

$$d(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_{i-1} \wedge x_{i+1} \wedge \cdots \wedge x_{j-1} \wedge x_{j+1} \wedge \cdots \wedge x_n.$$

La propiedad $d \circ d = 0$, la cual hace a esta sucesión un complejo cadena, se prueba usando la antisimetría del producto exterior $x \wedge y = -y \wedge x$, la identidad de Jacobi $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ y la antisimetría $[x, x] = 0$ del corchete de Lie en \mathcal{G} .

J. L. Loday muestra que si se define el operador de frontera de Chevalley-Eilenberg como

$$d(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = \sum_{i < j} (-1)^{j+1} x_1 \wedge \cdots \wedge x_{i-1} \wedge [x_i, x_j] \wedge x_{i+1} \wedge \cdots \wedge x_{j-1} \wedge x_{j+1} \wedge \cdots \wedge x_n,$$

entonces la propiedad $d \circ d = 0$ se prueba sin usar las propiedades antisimétricas del producto exterior y del corchete de Lie sobre \mathcal{G} ; y que es suficiente que el corchete satisfaga la llamada identidad de Leibniz

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

la cual es equivalente a la identidad de Jacobi siempre y cuando el corchete sea antisimétrico.

A partir de esto se tiene que los operadores de frontera de Chevalley-Eilenberg, en el sentido de J. L. Loday, pueden ser llevados a las potencias tensoriales $\mathcal{G}^{\otimes *}$ de un álgebra de Lie, produciendo un nuevo complejo cadena con operador de frontera

$d : \mathcal{G}^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{G}^{\otimes n-1}$, llamado el complejo de Leibniz. Este complejo está definido no solo para las álgebras de Lie, si no para una clase más grande de álgebras, las álgebras de Leibniz.

A partir de esto Loday introduce la definición de álgebra de Leibniz de la siguiente manera:

Definición 1 *Un álgebra de Leibniz sobre un campo \mathbb{K} , es un espacio vectorial L sobre \mathbb{K} dotado de un producto bilineal, llamada corchete de Leibniz, $[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L$ el cual satisface la identidad de Leibniz*

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y], \quad \text{para todo } x, y, z \in L. \quad (\text{L})$$

Es importante notar que si el corchete de Leibniz es anti-simétrico, entonces L es un álgebra de Lie, dado que en este caso la identidad de Jacobi es equivalente a la identidad de Leibniz. Por lo tanto, toda álgebra de Lie es un álgebra de Leibniz, de donde se tiene que las álgebras de Leibniz son una generalización de las álgebras de Lie.

Se siguen directamente de la identidad de Leibniz (L) las identidades:

$$[x, [y, y]] = 0, \quad \text{y} \quad [x, [y, z]] + [x, [z, y]] = 0,$$

Veamos ahora algunos ejemplos de álgebras de Leibniz. El primero de ellos es un ejemplo de álgebra de Leibniz que surge de manera natural en conexión con módulos en álgebras de Lie.

Ejemplo 2 *Sean \mathcal{G} un álgebra de Lie y M un \mathcal{G} -módulo con acción $M \times \mathcal{G} \rightarrow M$, $(m, x) \mapsto mx$. Dada una aplicación lineal \mathcal{G} -equivariante $f : M \rightarrow \mathcal{G}$, es decir que*

$$f(mx) = [f(m), x], \quad \text{para todo } m \in M \text{ y } x \in \mathcal{G},$$

podemos definir una estructura de álgebra de Leibniz sobre M si definimos el corchete

$$[m, n]' := mf(n), \quad \text{para todo } m, n \in M.$$

El álgebra de Leibniz M es un álgebra de Lie si y sólo si $mf(n) + nf(m) = 0$, para todo $m, n \in M$.

Adicionalmente, la aplicación f define un homomorfismo del álgebra de Leibniz M en el álgebra de Leibniz (Lie) \mathcal{G} , ya que

$$f([m, n]') = f(mf(n)) = [f(m), f(n)].$$

El siguiente ejemplo fue introducido y estudiado por Y. Kosmann-Schwarzbach en [25]. En este artículo Kosmann-Schwarzbach estudia la relación que existe entre las álgebras de Leibniz, específicamente las álgebras generadas por derivaciones, y la geometría diferencial clásica.

Ejemplo 3 Sea $(\mathcal{G}, [\cdot, \cdot], d)$ un álgebra de Lie diferencial. Si definimos sobre \mathcal{G} el corchete $[\cdot, \cdot] : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ por

$$[x, y]_d := [x, dy], \quad \forall x, y \in \mathcal{G},$$

entonces $(\mathcal{G}_d, [\cdot, \cdot]_d)$ es un álgebra Leibniz, la cual llamaremos el álgebra derivada de \mathcal{G} , y que no es antisimétrica.

Y. Kosmann-Schwarzbach encontró que en las variedades de Poisson existen las bases de dos estructuras de álgebras de Leibniz (graduadas): las extensiones del corchete de Poisson de funciones a multicampos vectoriales y a formas diferenciales.

Para ver más ejemplos de álgebras de Leibniz ver [28]. En este artículo J. L. Loday exhibe ejemplos relacionados con módulos tensoriales, complejos de Hochschild, mecánica Hamiltoniana y Formas diferenciales entre otros. Además, se desarrollan los conceptos de módulo, diálgebra envolvente, homología y cohomología de las álgebras de Leibniz.

Introduciremos ahora el concepto de ideal anulador de un álgebra de Leibniz, el cual juega un papel predominante en el desarrollo de la teoría algebraica de las álgebras de Leibniz.

Definición 4 Dada un álgebra de Leibniz L , denotamos por L^{ann} el subespacio de L generado por los elementos de la forma $[x, x]$, para todo $x \in L$.

Además, para todo $x, y \in L$, definimos

$$\text{ann}(x, y) := [x, y] + [y, x] \in L^{\text{ann}}.$$

Si consideramos el **anulador a derecha** de L , definido por

$$Z^r(L) := \{z \in L \mid [x, z] = 0, \forall x \in L\},$$

tenemos las siguientes relaciones (ver [26]):

Lema 5 Sea L un álgebra de Leibniz, entonces

1. $L^{\text{ann}} \subset Z^r(L)$.
2. L^{ann} y $Z^r(L)$ son ideales bilaterales de L .

3. $[Z^r(L), L] \subset L^{ann}$.

Más aún, el álgebra de Leibniz L es un álgebra de Lie si y sólo si $L^{ann} = \{0\}$.

Para cualquier álgebra de Leibniz L , si construimos el álgebra cociente vía el ideal L^{ann} tenemos que el álgebra $L_{Lie} := L/L^{ann}$ es un álgebra de Lie.

Más aún, el ideal L^{ann} es el menor ideal bilateral I en L tal que el álgebra cociente L/I es un álgebra de Lie. En efecto, sea I un ideal bilateral arbitrario de L tal que L/I es un álgebra de Lie, entonces para $x \in L$ se tiene que $[x, x] + I = I$ y por lo tanto $L^{ann} \subset I$.

Además, la aplicación cociente $\pi : L \rightarrow L_{Lie}$ es un homomorfismo de álgebras de Leibniz, el cual es universal con respecto a todos los homomorfismos de L en cualquier otra álgebra de Lie \mathcal{G} , es decir que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\pi} & L_{Lie} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

Como $L^{ann} \subset Z^r(L)$ y $L^{Lie} := L/Z^r(L)$ es un álgebra de Lie, por lo tanto tenemos una extensión central de álgebras de Lie

$$0 \rightarrow L^a \rightarrow L_{Lie} \rightarrow L^{Lie} \rightarrow 0,$$

donde $L^a = Z^r(L)/L^{ann}$.

Las álgebras de Leibniz son de hecho álgebras a derecha de Leibniz. Para las estructuras opuestas (álgebras a izquierda de Leibniz), que se obtienen definiendo $[x, y]' := [y, x]$, la identidad a izquierda de Leibniz es

$$[[x, y]', z]' = [y, [x, z]']' - [x, [y, z]']'. \quad (L')$$

Consideremos ahora la noción de biderivación sobre álgebras de Leibniz. Para ello introduzcamos la siguiente definición:

Definición 6 Sea L un álgebra de Leibniz. Una **derivación** sobre L es una aplicación lineal $d : L \rightarrow L$ que satisface la identidad

$$d([x, y]) = [dx, y] + [x, dy], \quad \forall x, y \in L.$$

Una **anti-derivación** sobre L es una aplicación lineal $D : L \rightarrow L$ que satisface la identidad

$$D([x, y]) = [Dx, y] - [Dy, x], \quad \forall x, y \in L.$$

Notemos que si L es un álgebra de Lie, los conceptos de derivación y anti-derivación coinciden.

Por definición, diremos que una **biderivación** sobre L es la pareja formada por una derivación d y una anti-derivación D que satisfacen la identidad

$$[x, dy] = -[x, Dy] \quad \forall x, y \in L.$$

Definamos ahora los conceptos de operador adjunto y estudiemos su relación con las biderivaciones sobre álgebras de Leibniz.

Definición 7 *Sea L un álgebra de Leibniz. Para todo $x \in L$ definimos los operadores lineales $ad_x, Ad_x : L \rightarrow L$ por $ad_x(y) = [y, x]$ y $Ad_x(y) = [x, y]$, para todo y en L .*

De la definición anterior, tenemos que para todo $x \in L$, la aplicación ad_x es una derivación sobre L y la aplicación Ad_x es una anti-derivación sobre L . Más aún, (ad_x, Ad_x) es una biderivación sobre L , la cual llamaremos la **biderivación interna** sobre L asociada a x .

Si sobre el conjunto de biderivaciones de L , el cual denotaremos por $Bider(L)$, definimos el corchete

$$[(d, D), (d', D')] := (dd' - d'd, Dd' - d'D), \quad \forall (d, D), (d', D') \in Bider(L),$$

tenemos que $Bider(L)$ es un álgebra de Leibniz. Además, se tiene que la aplicación $L \rightarrow Bider(L)$ dada por $x \rightarrow (ad_x, Ad_x)$ es un homomorfismo de álgebras de Leibniz.

El conjunto de las derivaciones internas sobre L lo denotaremos por $Inner(L)$. Más aún, $Inner(L)$ es un álgebra de Leibniz, en particular una subálgebra de $Bider(L)$.

Nota 8 *La aplicación ad_x será base fundamental para el desarrollo del último capítulo de esta tesis, en particular para mostrar la relación existente entre álgebras de Leibniz y las álgebras cuasi-Jordan (que intruduciremos en el capítulo 3). Allí estudiaremos con más detalle algunas propiedades de esta aplicación.*

Para terminar esta primera sección consideremos el siguiente ejemplo de álgebras de Leibniz, el cual caracteriza todas las posibles estructuras de álgebras de Leibniz que se pueden definir sobre un espacio vectorial fijo V (ver [20]).

Dado un espacio vectorial V , sobre el espacio $gl(V) \oplus V$ definimos un corchete de Leibniz por

$$[(A, u), (B, v)] := ([B, A], Bu), \quad \text{para todo } \forall u, v \in V, \forall A, B \in gl(V).$$

Para el álgebra de Leibniz $gl(V) \oplus V$, la cual denotaremos por L_V , Kinyon en [18] afirma que si $f : V \rightarrow gl(V)$ es una transformación lineal, entonces el gráfico

$\mathcal{G}_V = \{(f(u), u | u \in V)\}$ es una subálgebra de L_V si y sólo si $[u, v] = f(v)u$ define un álgebra de Leibniz sobre V .

En efecto, tenemos que \mathcal{G}_V es una subálgebra de L_V si y sólo si $[f(v), f(u)] = f(f(v)u)$, para todo $u, v \in V$.

De otro lado, si consideramos sobre V el corchete definido por $[u, v] = f(v)u$, tenemos que

$$\begin{aligned} [u, [v, w]] &= [u, f(w)v] = f(f(w)v)u, \\ [[u, v], w] &= [f(v)u, w] = f(w)f(v)u \end{aligned}$$

y

$$[[u, w], v] = [f(w)u, v] = f(v)f(w)u.$$

Por lo tanto V_f es un álgebra de Leibniz si y sólo si

$$f(f(w)v) = [f(w), f(v)], \quad \forall w, v \in V.$$

De lo anterior se sigue la afirmación de M. Kinyon.

Recíprocamente, si V es una álgebra de Leibniz, entonces $\{(ad_u, u) | u \in V\}$ es una subálgebra de L_V , ya que $ad_{[u, v]} = [ad_v, ad_u]$ (ver capítulo 4, sección 1).

De acuerdo con lo anterior, Kinyon muestra que L_V contiene todas las posibles estructuras de álgebras de Leibniz que se pueden definir sobre V . Más específicamente, la clase de todas las estructuras de álgebras de Leibniz sobre V corresponde a la clase de todas las aplicaciones lineales de V en $gl(V)$ cuyos gráficos son subálgebras de L_V .

Adicionalmente, M. Kinyon y A. Weinstein definen el concepto de álgebra envolvente de Lie para un álgebra de Leibniz, y prueban que toda álgebra de Leibniz tiene un álgebra envolvente de Lie (ver [20]).

Es importante notar que el desarrollo de la teoría homológica de las álgebras de Leibniz ha sido desarrollada ampliamente por J. L. Loday y sus colaboradores. Por su parte, el desarrollo de la teoría algebraica de las álgebras de Leibniz no ha tenido el mismo desarrollo, y es a partir de principios del 2000 donde la teoría algebraica se ha venido desarrollando. En este sentido es importante notar los aportes realizados por M. Kinyon ([19], A. Weinstein ([20]), R. Felipe ([9]), F. Ongay ([33]), B. A. Omirov, Sh. A. Ayupov, S. Albeverio ([2]) y K. Liu ([27]), entre otros.

1.2. Diálgebras

En esta sección intruduciermos el concepto de diálgebra, presentaremos el concepto de unidad barra y probaremos su relación con las álgebras asociativas. Adicionalmente, caracterizaremos las diálgebras por medio de módulos sobre álgebras asociativas.

En la teoría clásica de álgebras de Lie, se tiene claro la relación existente entre éstas y las álgebras asociativas. Más específicamente, sabemos que toda álgebra asociativa

A define un álgebra de Lie a través del corchete antisimétrico $[a, b] = ab - ba$, llamado el corchete canónico.

Además, se tiene que toda álgebra de Lie es isomorfa a una subálgebra de un álgebra asociativa unital con el corchete canónico, en particular esta subálgebra es la llamada *álgebra envolvente universal* de un álgebra de Lie.

En la búsqueda de una estructura análoga a las álgebras asociativas y que tuviera propiedades similares, con respecto a las álgebras de Leibniz, a las que tienen las álgebras asociativas con respecto a las álgebras de Lie, J. L. Loday introdujo el concepto de *álgebra diasociativa* o *diálgebra*.

En esencia, una diálgebra es una generalización de las álgebras asociativas con dos productos que generaliza las relaciones existentes entre álgebras asociativas y de Lie, al contexto de álgebras de Leibniz.

Los resultados concernientes a las relaciones existentes entre álgebras de Leibniz y diálgebras serán el tema de la siguiente sección.

Definición 9 Una **diálgebra** sobre un campo \mathbb{K} es un espacio vectorial D sobre \mathbb{K} en el cual están definidos dos productos bilineales asociativos

$$\dashv: D \times D \rightarrow D$$

$$\vdash: D \times D \rightarrow D$$

que satisfacen las identidades:

$$x \dashv (y \dashv z) = x \dashv (y \vdash z) \tag{D1}$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z) \tag{D2}$$

$$(x \vdash y) \vdash z = (x \dashv y) \vdash z \tag{D3}$$

Observación 10 El análogo de la fórmula (D2), pero con los productos cambiados, en general no se satisface en diálgebras: $(x \dashv y) \vdash z \neq x \dashv (y \vdash z)$.

Un morfismo de diálgebras, es una aplicación lineal $f : D \rightarrow D'$ que satisface la condición

$$f(x \dashv y) = f(x) \dashv f(y) \quad \text{y} \quad f(x \vdash y) = f(x) \vdash f(y),$$

para todo x, y en D .

Definición 11 Una *unidad barra* en D es un elemento e en D tal que

$$x \dashv e = x = e \vdash x, \quad \text{para todo } x \in D.$$

Las unidades barra en una diálgebra D no son necesariamente únicas (ver ejemplos 13 y 14). El conjunto de unidades barra en D se denomina el **Halo** de D y lo denotaremos por $H(D)$.

En general, cuando hagamos referencia a una **diálgebra unital** nos estaremos refiriendo a la pareja (D, e) , donde D es una diálgebra con unidad barra específica e .

Nota 12 Existe un proceso estándar para adicionar una unidad a un álgebra asociativa, pero el problema de adicionar unidades barra a diálgebras es un **problema abierto**. En esta tesis resolveremos este problema para el caso particular de las diálgebras separables (ver capítulo 2, sección 2.3).

Se sigue directamente de la identidad (D2) que si en una diálgebra D existe un elemento ϵ tal que $\epsilon \dashv x = x$, para todo $x \in D$, entonces $\dashv = \vdash$ y por lo tanto D es un álgebra asociativa con unidad ϵ . Por consiguiente, en diálgebras solo se consideran unidades barra.

Un ejemplo trivial de diálgebra son las álgebras asociativas. En efecto, si A es un álgebra asociativa (unital), entonces las fórmulas $x \dashv y = xy = x \vdash y$ definen una estructura de diálgebra (unital) en A , la cual denotaremos por A_{Di} .

La categoría de álgebras asociativas **As** es una subcategoría de la categoría de las diálgebras **Dias**. Además, se tiene el functor $Di : \mathbf{As} \rightarrow \mathbf{Dias}$.

El siguiente ejemplo fue ampliamente estudiado en [12], en relación con las ecuaciones de Yang-Baxter sobre álgebras de Leibniz matriciales determinadas por diálgebras.

Ejemplo 13 Sea V un espacio vectorial y fijemos $\varphi \in V'$ (el dual algebraico). Si sobre V definimos los productos $x \dashv y = \varphi(y)x$ y $x \vdash y = \varphi(x)y$, entonces (V, \vdash, \dashv) es una diálgebra, la cual denotaremos por V_φ . Si $\varphi \neq 0$, entonces V_φ es una diálgebra con unidades barra no triviales. Más aún, su halo es un espacio afín modelado por el subespacio $\text{Ker}\varphi$, dado que para todo $x_0 \in V$, con $\varphi(x_0) \neq 0$, se tiene que $x_0/\varphi(x_0)$ es una unidad barra.

El siguiente ejemplo es el análogo del álgebra de Leibniz generada por un álgebra de Lie diferencial (ver ejemplo 3) en el contexto de las álgebras asociativas.

Ejemplo 14 Sea (A, d) un álgebra diferencial asociativa, es decir un álgebra asociativa y una aplicación lineal d tal que $d(ab) = da b + a db$ y $d(ad b) = da db = d(dab)$, para todo $a, b \in A$. Si definimos sobre A los productos $x \dashv y = x dy$, $x \vdash y = dx y$, entonces (A, \vdash, \dashv) es una diálgebra, la cual denotaremos por A_d .

Si el álgebra asociativa A es unital, con unidad 1 , y el campo \mathbb{K} es de característica diferente de dos, entonces necesariamente $d1 = 0$. Por lo tanto, en la diálgebra derivada A_d tenemos que $a \dashv 1 = a \cdot d1 = 0$ y que $1 \vdash a = d1 \cdot a = 0$, es decir que 1 no es una unidad barra sobre A_d .

Una unidad barra en A_d es un elemento $x \in A$ tal que $dx = 1$, pero este elemento no necesariamente existe en A .

Si consideramos el álgebra de Lie $\mathcal{G} = A_{Lie}$, determinada por el álgebra asociativa A , con corchete $[a, b] = ab - ba$, se tiene que el álgebra de Leibniz derivada \mathcal{G}_d coincide con el álgebra de Leibniz de A_d (ver sección 3, teorema 20), cuyo corchete está dado por $[a, b] = a \dashv b - b \vdash a$, es decir que $(A_d)_L \cong (A_L)_d$.

Ejemplo 15 Sea D una diálgebra, entonces el conjunto $M_n(D)$ de matrices de orden $n \times n$ con entradas en D forma una diálgebra con productos a izquierda y a derecha definidos por

$$(a \dashv b)_{ij} = \sum_k a_{ik} \dashv b_{kj} \quad y \quad (a \vdash b)_{ij} = \sum_k a_{ik} \vdash b_{kj}$$

Para determinar la relación existente entre las diálgebras y las álgebras asociativas, introduzcamos primero las siguientes definiciones.

Definición 16 Sea D una diálgebra. Diremos que I es una subdiálgebra si $x \vdash y$ y $x \dashv y$ están en I , para todo $x, y \in I$.

De igual manera, diremos que I es un ideal (un ideal bilateral) si $x \vdash y$ y $x \dashv y$ están en I , siempre y cuando una de las variables esté en I , es decir si x o y está en I .

Ahora introduciremos el ideal anulador en diálgebras, el cual juega un papel predominante en la teoría, tal como sucede en el caso de las álgebras de Leibniz.

Definición 17 Sea D una diálgebra. Consideremos el subespacio vectorial de D generado por los elementos de la forma $a \dashv b - a \vdash b$, para todo $a, b \in D$. A este subespacio lo denotaremos por D^{ann} , es decir que

$$D^{ann} := \langle a \dashv b - a \vdash b \mid a, b \in D \rangle.$$

Mostraremos más adelante que el subespacio vectorial D^{ann} es un ideal en D (ver el lema 37, sección 2.1).

Si consideramos el álgebra cociente $D_{as} := D/D^{ann}$, tenemos que D_{as} es un álgebra asociativa. Más aún, no es difícil ver que D^{ann} es el menor ideal en D tal que el álgebra cociente es un álgebra asociativa.

Cuando D tiene una unidad barra e , entonces \bar{e} es la unidad sobre el álgebra asociativa D_{as} . Más aún, el ideal D^{ann} está generado por los elementos $a - a \vdash e$ y $a - e \dashv a$, para todo $a \in D$.

De otro lado, si A es un álgebra asociativa, entonces $D^{ann} = \{0\}$ y por lo tanto $(A_{Di})_{as} \cong A$. De lo anterior se sigue que el functor Di admite un functor adjunto a izquierda $as : \mathbf{Dias} \rightarrow \mathbf{As}$ (para más detalles ver [8]).

Consideremos ahora un ejemplo final de diálgebras que nos permitirá caracterizarlas. Otros ejemplos se pueden ver en [8] y [29].

Ejemplo 18 Sean A un álgebra asociativa y M un bimódulo sobre A . Si $f : M \rightarrow A$ es una aplicación A -bimodular, entonces podemos dotar a M de la estructura de diálgebra definiendo

$$m \dashv n := mf(n) \quad y \quad m \vdash n := f(m)n, \quad \forall m, n \in M.$$

Si invertimos el proceso anterior, podemos probar que todas las diálgebras pueden ser obtenidas de esta manera, de acuerdo con la siguiente proposición (ver [8], proposición 1.6, pag. 72). Daremos su demostración ya que nos será de utilidad en el segundo capítulo para introducir el concepto de diálgebra separable.

Proposición 19 Sean D una diálgebra y D_{as} su álgebra asociativa canónica. Entonces existe una estructura de D_{as} -bimódulo sobre D y un morfismo de D_{as} -bimódulos $f : D \rightarrow D_{as}$ tal que la estructura de diálgebra sobre D se recupera definiendo $a \dashv b = a \cdot f(b)$ y $a \vdash b = f(a) \cdot b$.

Demostración: Primero definimos sobre D una estructura de bimódulo sobre el álgebra asociativa D_{as} vía las acciones

$$D_{as} \times D \rightarrow D, \quad \bar{a} \cdot b := a \vdash b$$

y

$$D \times D_{as} \rightarrow D, \quad a \cdot \bar{b} := a \dashv b.$$

La asociatividad de los productos \dashv y \vdash , y las identidades (D1) y (D3) en la definición de diálgebra garantizan que la identidad $\overline{a \dashv b} = \overline{a \vdash b}$ es coherente con las acciones anteriores. Con respecto a esas acciones, la proyección canónica $D \rightarrow D_{as}$ es claramente un morfismo de bimódulos e induce sobre D la estructura de diálgebra dada. ■

1.3. La relación functorial entre las álgebras de Leibniz y las diálgebras

El objetivo de esta sección es mostrar que la relación existente entre las álgebras asociativas y las de Lie, se extiende de manera análoga a las diálgebras y las álgebras

de Leibniz. En particular presentaremos las relaciones functoriales existentes entre las categorías de las álgebras asociativas (**As**), las álgebras de Lie (**Lie**), las diálgebras (**Dias**) y las álgebras de Leibniz (**Leib**) (para las pruebas y más detalles ver [29]).

Iniciamos con el siguiente análogo del corchete canónico de Lie definido sobre un álgebra asociativa, en el contexto de las álgebras de Leibniz y las diálgebras.

Lema 20 *Sea D una diálgebra. Si sobre D definimos*

$$[a, b] := a \dashv b - b \vdash a, \quad \forall a, b \in D,$$

entonces $(D, [\cdot, \cdot])$ es un álgebra de Leibniz, la cual llamaremos el álgebra de Leibniz canónica en D y que denotaremos por D_L .

El corchete de Leibniz definido en el anterior lema es antisimétrico si los productos \dashv y \vdash coinciden.

La construcción anterior define el functor

$$- : \mathbf{Dias} \rightarrow \mathbf{Leib}$$

de la categoría de las diálgebras en la categoría de las álgebras de Leibniz.

Si consideramos el functor

$$- : \mathbf{As} \rightarrow \mathbf{Lie}$$

de la categoría de las álgebras asociativas en la categoría de las álgebras de Lie, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 21 *El siguiente diagrama de categorías y funtores es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Dias} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Leib} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{As} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Lie} \end{array}$$

Teniendo en cuenta la anterior proposición y el hecho de que el functor $- : \mathbf{As} \rightarrow \mathbf{Lie}$ tiene un adjunto a izquierda, el cual es el álgebra envolvente universal de un álgebra de Lie:

$$U(\mathcal{G}) = T(\mathcal{G}) / \{[x, y] - x \otimes y + y \otimes x \mid x, y \in \mathcal{G}\},$$

donde T es el álgebra tensorial del álgebra de Lie \mathcal{G} , entonces de manera similar podemos definir la *diálgebra envolvente universal* de un álgebra de Leibniz L como el siguiente cociente de la diálgebra libre sobre L (ver [29] para más detalles):

$$Ud(L) := T(L) \otimes L \otimes T(L) / \{[x, y] - x \otimes y + y \otimes x \mid x, y \in L\}.$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 22 *El functor $Ud : \mathbf{Leib} \rightarrow \mathbf{Dias}$ es el adjunto a izquierda del functor $- : \mathbf{Dias} \rightarrow \mathbf{Leib}$.*

Terminaremos esta sección enunciando dos resultados debidos a Loday ([29]), los cuales relacionan las álgebras asociativas y de Lie canónicas con la diálgebra envolvente universal y con el álgebra de Leibniz, respectivamente.

Lema 23 *Para toda álgebra de Leibniz L , se tiene que $Ud(L)_{as} = U(L_{Lie})$.*

Proposición 24 *La diálgebra envolvente universal $Ud(L)$ es isomorfa a $U(L_{Lie}) \otimes L$, equipado con la estructura de diálgebra construida a partir de un $U(L_{Lie})$ -bimódulo y la aplicación bimodular $U(L_{Lie}) \otimes L \rightarrow U(L_{Lie})$ (ver ejemplo 18).*

1.4. Álgebras de Jordan

En esta sección introduciremos las álgebras de Jordan y mostraremos algunos resultados básicos. La idea central es conocer la estructura básica de las álgebras de Jordan y presentar solamente aquellos resultados que nos serán de utilidad en los capítulos siguientes, tales como la noción de inverso.

Iniciaremos con un breve recorrido histórico sobre el surgimiento de las álgebras de Jordan, antes de presentar los resultados teóricos.

Para comenzar, digamos que las álgebras de Jordan surgen a comienzos de 1930 con los trabajos de Pascual Jordan en relación con la formalización matemática de la Mecánica cuántica.

El trabajo central donde se define el concepto de álgebra de Jordan y se estudian sus primeras propiedades es el artículo *On an algebraic generalization of the quantum mechanical*, de Pascual Jordan, John von Neumann y Eugene Wigner (ver [16]).

Las álgebras de Jordan surgen de la siguiente manera. Según la interpretación habitual de la mecánica cuántica, los *observables* son matrices hermitianas (u operadores hermitianos en un espacio de Hilbert) $x^* = x$, donde x^* denota el conjugado de la traspuesta de x , es decir que $x^* = \bar{x}^{tr}$. Las operaciones algebraicas básicas que podemos realizar en el conjunto de observables x son las operaciones de matrices:

λx	multiplicación por un escalar complejo λ
$x + y$	suma de matrices
xy	producto de matrices
x^*	adjunto

El problema que presenta esta formulación es que el conjunto de los observables no es cerrado bajo estas operaciones o, como dirían los físicos, las operaciones no son intrínsecas a la parte físicamente significativa del sistema: la multiplicación por escalares λx sólo devuelve una matriz hermitiana si el escalar es un real, y el producto de dos observables x e y es de nuevo una matriz hermitiana únicamente si x e y conmutan (o, dicho en términos físicos, si x e y se pueden observar simultáneamente) y además la interpretación matricial parece insuficiente cuando se intenta aplicar la mecánica cuántica a los fenómenos relativistas y nucleares.

Jordan propuso un nuevo enfoque al estudio de los observables en el que se consideraban las propiedades algebraicas de las matrices hermitianas sin referencia explícita al álgebra de matrices subyacente. Su estrategia fue la siguiente:

1. formular las propiedades que parecían esenciales y físicamente significativas en el conjunto de las matrices hermitianas;
2. considerar sistemas abstractos en los que las propiedades se tomen como axiomas, y determinar qué otros sistemas satisfacen dichos axiomas.

Se pretendía encontrar un sistema que no estuviera formado por matrices hermitianas pero que se comportara como ellas y proporcionara una nueva estructura matemática a la mecánica cuántica o a sus posibles generalizaciones.

Las operaciones observables en matrices u operadores hermitianos son:

αx	multiplicación por un escalar real α
$x + y$	suma de matrices
$x \bullet y = xy + yx$	producto simétrico
xyx	producto cuadrático
x^n	potencias ($n = 0, 1, 2, \dots$)

El trabajo empírico con las operaciones anteriores puso de manifiesto dos identidades básicas de grados 2 y 4 que parecían implicar las demás. Jordan tomó como axioma la existencia de un producto bilineal $x \bullet y$ en un espacio vectorial real que cumpliera estas dos identidades:

$$x \bullet y = y \bullet x \quad (\text{propiedad conmutativa})$$

$$(x^2 \bullet y) \bullet x = x^2 \bullet (y \bullet x). \quad (\text{identidad de Jordan})$$

Estos sistemas y sus generalizaciones directas a módulos sobre anillos de escalares que contengan $\frac{1}{2}$ hoy en día son conocidos como *álgebras de Jordan* (lineales). El nombre *álgebra de Jordan* fue introducido por primera vez por A. A. Albert en 1946.

Por lo tanto, tenemos la definición de álgebra de Jordan como:

Definición 25 Sea J un espacio vectorial sobre un campo \mathbb{K} de característica diferente de 2. Decimos que J es un **álgebra Jordan** sobre \mathbb{K} si existe un producto $\bullet : J \times J \rightarrow J$ que satisface las identidades

$$a \bullet b = b \bullet a \quad (1.1)$$

y

$$a^2 \bullet (b \bullet a) = (a^2 \bullet b) \bullet a, \quad (1.2)$$

para todo $a, b \in J$, donde $a^2 = a \bullet a$.

Un álgebra de Jordan se dice que es *especial* si se puede encajar en un álgebra asociativa tal que el producto $x \bullet y$ se construya a partir del producto asociativo como $x \bullet y = \frac{1}{2}(xy + yx)$. En caso contrario, el álgebra de Jordan se dice *excepcional*. La pretensión de Jordan era, por lo tanto, encontrar álgebras de Jordan excepcionales con las que modelar el comportamiento de los observables en mecánica cuántica.

En el artículo de Jordan, von Neumann y Wigner, se prueba que las álgebras de Jordan finito dimensionales formalmente reales eran sumas directas de sistemas simples de los que había cinco modelos:

$$H_n(\mathbb{R}), \quad H_n(\mathbb{C}), \quad H_n(\mathbb{Q}), \quad H_3(\mathbb{O}), \quad J(Q),$$

donde \mathbb{Q} denota los cuaterniones y \mathbb{O} son los octoniones o números de Cayley, y el producto en $J(Q) = \mathbb{R}1 \oplus V$ viene dado por una forma cuadrática Q definida sobre el espacio vectorial V con valores en \mathbb{R} de modo que $x \bullet y = Q(x, y)$. Los tres primeros y $J(Q)$ son álgebras especiales y en [1] A. Albert prueba que $H_3(\mathbb{O})$ es excepcional.

Este hallazgo supuso un fracaso para los objetivos iniciales de Jordan. Los propios autores comentaban que las álgebras de Jordan finito dimensionales estaban demasiado cerca de las álgebras de matrices que trataban de evitar y que tan sólo el álgebra 27-dimensional $H_3(\mathbb{O})$ tenía un comportamiento distinto, aunque era demasiado “pequeña” para la generalización que buscaban.

Tras algún intento por parte de los físicos de estudiar álgebras de Jordan en contextos más generales, se produjo un abandono mayoritario de este tema por su parte, dejando paso a los algebristas: Albert, Jacobson y otros desarrollaron una teoría completa de álgebra de Jordan finito dimensionales sobre cuerpos arbitrarios de característica distinta de dos.

Es de destacar que las álgebras de Jordan (especialmente el álgebra 27-dimensional $H_3(\mathbb{O})$), que surgieron en un intento fallido de encontrar una nueva estructura algebraica para la mecánica cuántica, han resultado tener aplicaciones muy importantes a grupos y álgebras de Lie, a Geometría y a Análisis Matemático. Para conocer un poco más sobre las aplicaciones de las álgebras de Jordan leer el artículo de Kevin McCrimon, *Jordan algebras and their applications*, ([32]) o el capítulo cero, *a colloquial survey of Jordan theory*, de su libro *a taste of Jordan algebras* (ver [31]).

Dado que nuestro principal interés es introducir una nueva generalización de las álgebras de Jordan a partir de diálgebras, mostraremos algunas de las propiedades de las álgebras de Jordan y estudiaremos su relación con álgebras de Lie. Presentaremos a continuación, sin pruebas, algunos resultados básicos de la teoría de álgebras de Jordan.

Los resultados que presentaremos están básicamente contenidos en los libros de Max Koecher [24] y de Nathan Jacobson [15]. Por simplicidad en la notación denotaremos el producto $a \bullet b$ en las álgebras de Jordan por ab .

Para comenzar, introduciremos una clase especial de operadores sobre álgebras arbitrarias que serán de utilidad en lo que sigue. Dado un elemento x en un álgebra A , los operadores lineales de multiplicación a izquierda y a derecha (respectivamente) $L_x, R_x : A \rightarrow A$ están definidos por $L_x(y) = xy$ y $R_x(y) = yx$, para todo $y \in A$.

En el caso de álgebras de Jordan estos operadores coinciden por la propiedad conmutativa. Si reescribimos los axiomas de la definición de álgebra de Jordan en términos del operador de multiplicación a derecha R_x (que es equivalente a escribirlos en términos del operador de multiplicación a izquierda), tenemos los axiomas equivalentes:

$$R_a(b) = R_b(a) \quad (1.3)$$

y

$$R_a R_{a^2} = R_{a^2} R_a \quad (1.4)$$

Si realizamos el llamado proceso de *linealización* a la identidad de Jordan (1.2) obtenemos la identidad

$$2(ab)(ac) + a^2(bc) = 2a(b(ac)) + (a^2b)c, \quad (1.5)$$

la cual se conoce como la *fórmula de polarización*. Si consideramos esta identidad como una transformación lineal en c obtenemos

$$2R_{ab}R_a + R_{a^2}R_b = 2R_aR_bR_a + R_{a^2b}. \quad (1.6)$$

De manera análoga, si consideramos a b como una variable, obtenemos

$$2R_{ab}R_a + R_{a^2}R_b = 2R_aR_{ab} + R_bR_{a^2}. \quad (1.7)$$

Diremos que dos elementos a, b en un álgebra de Jordan J *conmutan* si

$$a(bc) = b(ac), \quad \text{para todo } c \in J$$

En este sentido, tenemos que a y b conmutan sí y sólo si los operadores R_a y R_b conmutan. En estos términos, un álgebra conmutativa es un álgebra de Jordan sí y sólo si a y a^2 conmutan para todo $a \in J$. Por lo tanto, de (1.7) se tiene el siguiente lema.

Lema 26 *En un álgebra de Jordan J se tiene que a y ab conmutan sí y sólo si a^2 y b conmutan.*

Recordemos que las potencias de $a \in J$ están definidas por

$$a^1 = a, \quad a^{m+1} = a^m a, \quad \text{para } m \geq 1.$$

El siguiente resultado conduce a probar que toda álgebra de Jordan es asociativa en potencias.

Teorema 27 *Sean J un álgebra de Jordan, $a, b \in J$ y $m, n \geq 1$. Entonces*

1. R_{a^m} es un polinomio en R_a y R_{a^2} .
2. Los elementos a^m y a^n conmutan.
3. $R_{a^{m+1}} = R_{a^m} R_a - R_{a^{m-1}}(2R_a^2 - R_{a^2})$.
4. $a^m(a^n b) = a^{m+n} b$, si a, b conmutan.

Del teorema anterior se tiene el siguiente resultado.

Teorema 28 *Toda álgebra de Jordan J es asociativa en potencias, es decir que para todo $a \in J$ y para todos los enteros $m, n \geq 1$, se tiene que $a^m a^n = a^{m+n}$.*

Un ejemplo importante de una subálgebra asociativa de un álgebra de Jordan J es el *centro* $Z(J)$ de J , el cual consiste de todos los elementos $z \in J$ tal que z y a conmutan para cualquier $a \in J$. Esto nos permite probar que para todo $z \in Z(J)$ y para todo $a, b \in J$ se cumple la identidad

$$a(zb) = z(ab) = b(za).$$

Es claro de la conmutatividad y la ecuación anterior que $Z(J)$ es un álgebra asociativa. De la definición se tiene que z está en $Z(J)$ sí y sólo si R_z conmuta con todos los R_a , $a \in J$. Notemos que la ecuación $(bz)a = b(za)$ implica que

$$R_{za} = R_z R_a, \quad z \in Z(J), \quad a \in J.$$

De otro lado, diremos que un elemento e en un álgebra de Jordan J es una *unidad* si $ae = a = ea$, para todo $a \in J$. Es claro que en caso de existir una unidad en un álgebra de Jordan, esta es única.

En general las álgebras de Jordan no tienen unidad, pero existe un proceso estándar para adicionar unidades a cualquier álgebra de Jordan, es decir existe una extensión

\widehat{J} de cualquier álgebra de Jordan J tal que \widehat{J} es un álgebra de Jordan unital y J está inmersa en \widehat{J} .

Este proceso consiste en tomar \widehat{J} como la suma directa del campo \mathbb{K} y el álgebra de Jordan J , es decir que $\widehat{J} := \mathbb{K} \oplus J$. Sobre el espacio \widehat{J} definimos el producto

$$(\alpha + a) \bullet (\beta + b) := (\alpha\beta) + (\alpha b + \beta a + ab),$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $a, b \in J$. Es fácil ver que el elemento $(1, 0)$ es una unidad en \widehat{J} y que J es isomorfa al ideal $\{0\} \oplus J$ de \widehat{J} . Más aún, $ab = (0 + a) \bullet (0 + b)$, para todo $a, b \in J$.

Una caracterización importante de los operadores que conmutan con los operadores R_a , en terminos de la unidad, es la siguiente:

Lema 29 *Si J es un álgebra de Jordan unital, con unidad e , y $T : J \rightarrow J$ es una transformación lineal, entonces $TR_a = R_aT$, para todo $a \in J$ implica que $T = R_z$, para algún $z \in Z(J)$.*

En esta parte introduciremos la *representación cuadrática*, que es un transformación lineal definida sobre las álgebras de Jordan como

$$P_a(b) = 2(ba)a - ba^2$$

o lo que es lo mismo

$$P_a = 2R_a^2 - R_{a^2} \tag{1.8}$$

Esta transformación juega un papel crucial en el desarrollo de la teoría de las álgebras de Jordan y permitió el surgimiento de las álgebras de Jordan cuadráticas y de los pares de Jordan, entre otros. Además, está fuertemente asociado con varias aplicaciones en análisis y geometría. Como lo dice K. McCrimmon en su libro: *La historia de las álgebras de Jordan, no es la historia de un producto no asociativo ab , si no la historia de un producto cuadrático $P_a(b)$ y qué tan asociativo es este producto* (ver [31], pag. 8).

Una de las principales propiedades de la representación cuadrática es la llamada fórmula fundamental:

Teorema 30 *Sean J un álgebra de Jordan y P su representación cuadrática. Entonces para todo $a, b \in J$ se tiene que*

$$P_{P_a(b)} = P_a P_b P_a \tag{P}$$

Una característica especial de la representación cuadrática es que en el caso de que el álgebra de Jordan este generada por un álgebra asociativa A , entonces toma la forma

$$P_a(b) = aba.$$

En esta forma de la representación cuadrática no es necesario la condición de que el campo base sea de característica diferente de dos. Por lo tanto, las estructuras de Jordan basadas en la representación cuadrática trabajan en característica dos.

Como nuestro objetivo está en generalizar la teoría de las álgebras de Jordan lineales, nos concentraremos solamente en algunas propiedades básicas de la representación cuadrática.

Es claro que si e es una unidad en J , entonces $R_e = Id$ y $P_e = Id$, donde Id es la transformación identidad sobre J .

Una caracterización de las álgebras de Jordan por medio de la representación cuadrática es la siguiente:

Teorema 31 *Sea J un álgebra conmutativa sobre un campo \mathbb{K} de característica diferente de 2, 3 y 5. Entonces J es un álgebra de Jordan sí y sólo si la identidad $P_{a^2} = P_a^2$ se cumple para todo $a \in J$.*

Para terminar esta sección, introduciremos la noción de inverso en álgebras de Jordan unital. Por lo tanto, es importante recordar que si A es un álgebra asociativa unital, con unidad 1, y tenemos que a y b son inversos en A , es decir que $a \cdot b = 1 = b \cdot a$, entonces tenemos las relaciones de Jordan

$$ab = \frac{1}{2}(a \cdot b + b \cdot a) = 1$$

y

$$a^2b = \frac{1}{2}(a \cdot a \cdot b + b \cdot a \cdot a) = a.$$

Recíprocamente, supongamos que a y b son elementos que satisfacen las relaciones de Jordan

$$ab = 1 \quad \text{y} \quad a^2b = a, \tag{I}$$

entonces tenemos que $a \cdot b + b \cdot a = 2$ y $a \cdot a \cdot b + b \cdot a \cdot a = 2a$. Por lo tanto $a \cdot a \cdot b + a \cdot b \cdot a = a \cdot b \cdot a + b \cdot a \cdot a$ y $a \cdot a \cdot b = b \cdot a \cdot a$. Luego $2a = 2a \cdot a \cdot b = 2b \cdot a \cdot a$, o sea que $a = a \cdot a \cdot b = b \cdot a \cdot a$ y $ab = b \cdot (a \cdot a) \cdot a = ba$. De lo anterior y el hecho de que $a \cdot b + b \cdot a = 2$, se tiene que $a \cdot b = 1 = b \cdot a$, es decir que a y b son inversos. Estas consideraciones nos llevan a la siguiente definición.

Definición 32 *Sea J un álgebra de Jordan unital, con unidad e . Entonces un elemento $a \in J$ se dice que es **invertible**, con inverso b , si la ecuación (I) se satisface en J .*

Teniendo como base el procedimiento anterior y el hecho de que la subálgebra generada por e, a, b es especial (ver el teorema de Shirshov-Cohn, pag. 48 en [15]) entonces podemos concluir que b es invertible, con inverso a en el sentido asociativo, y si definimos $a^{-n} = b^n$, para $n > 0$, entonces tenemos que $a^m a^l = a^{m+l}$, para todos los enteros m, l .

Teniendo en cuenta la representación cuadrática y la definición anterior tenemos el siguiente teorema que caracteriza las existencia de inversos en un álgebra de Jordan unital.

Teorema 33 Sean J un álgebra de Jordan unital, con unidad e , y $a, b \in J$.

1. Si a es invertible en J , con inverso b , entonces b es invertible, con inverso a .
2. Las siguientes condiciones son equivalentes:
 - a) a es invertible.
 - b) e está en el rango de P_a .
 - c) P_a^{-1} existe.
3. Si a es invertible, entonces su inverso es único, el cual está dado por $b = P_a^{-1}a$ y satisface $P_b = P_a^{-1}$.
4. Si a y b son inversos, entonces $P_b = P_a^{-1}$ y $R_b = P_a^{-1}R_a$.
5. $R_{a^m}R_{b^l} = R_{b^l}R_{a^m}$, para todo $m, l \geq 0$. Además, si definimos $a^{-n} = b^n$, para $n > 0$, y $a^0 = e$, entonces $a^m a^l = a^{m+l}$, para todo los enteros m, l .
6. a y b son invertibles sí y sólo si $2a(ab) - a^2b$ es invertible.

1.5. La construcción TKK

En esta sección daremos un rápido repaso a la construcción TKK, la cual permite probar que toda álgebra de Jordan está inmersa en un álgebra de Lie, y enunciaremos algunos resultados relacionados. Los detalles y las pruebas de la construcción TKK que presentaremos, además de otros resultados, están contenidos en el texto *On Lie algebras defined by Jordan algebras* escrito por M. Koecher (ver [23]).

La construcción TKK o de Tits-Kantor-Koecher, que se originó en los trabajos de J. Tits [35], I. Kantor [17] y M. Koecher [21], muestra que toda álgebra de Jordan está asociada a un álgebra de Lie, más específicamete a un álgebra de Lie 3-graduada, y que el producto en el álgebra de Jordan se puede recuperar del corchete del álgebra

de Lie construida. Además, varias propiedades algebraicas de ambas estructuras son equivalentes.

La construcción TKK está basada en el álgebra de Lie de las derivaciones sobre un álgebra de Jordan, y en particular con las derivaciones internas. Las derivaciones internas son aquellas que son generadas por los operadores de multiplicación en los elementos del álgebra de Jordan. Para comenzar presentaremos los resultados concernientes al concepto de derivación interna sobre álgebras de Jordan.

Dada cualquier álgebra A , si denotamos por $Der(A)$ el conjunto de derivaciones sobre A y $d : A \rightarrow A$ es una transformación lineal, entonces

$$d \in Der(D) \iff L_{da} = [d, L_a] \iff R_{da} = [d, R_a],$$

donde $[\cdot, \cdot]$ denota el corchete de Lie de transformaciones lineales.

Además, este resultado muestra que $Der(A)$ es un álgebra de Lie con respecto a este corchete.

Ahora, sea J un álgebra de Jordan. Linealizando dos veces la identidad de Jordan $a^2(ba) = (a^2b)a$, se obtiene la identidad

$$(ab)(cd) + (ac)(bd) + (ad)(bc) = a(b(cd)) + c(b(ad)) + d(b(ac)), \quad a, b, c, d \in J.$$

Intercambiando a con c y restando las identidades resultantes se tiene que

$$L_{a(bc)-(ab)c} = [[L_a, L_c], L_b],$$

y por lo tanto tenemos que $[L_a, L_c] \in Der(J)$, para todo $a, c \in J$.

Una derivación sobre el álgebra de Jordan se dice que es *interna* si es una combinación lineal de derivaciones del tipo $[L_a, L_c]$. El espacio vectorial de todas las derivaciones internas de J se denota por $[L(J), L(J)]$ y es un ideal del álgebra de Lie $Der(J)$.

Sea J un álgebra de Jordan unital, con unidad e , y consideramos la suma $g(J)$ de los espacios vectoriales $Der(J)$ y $L(J) := \{L_a | a \in J\}$,

$$g(J) = Der(J) \oplus L(J).$$

Como $de = 0$, para todo $d \in Der(J)$, se tiene que esta suma es directa. Más aún, $g(J)$ es un álgebra de Lie llamada el *álgebra estructura* de J .

Si definimos la transformación lineal $T \mapsto T^*$ de $End(J)$ en sí mismo por

$$T^* = 2L_{Te} - T,$$

tenemos que $(T^*)^* = T$ y que $T \mapsto T^*$ aplica $g(J)$ en sí mismo, con

$$T^* = -d + L_a, \quad \text{si } T = d + L_a \in g(J)$$

Además, $T \mapsto T^*$ es un automorfismo del álgebra de Lie $g(J)$.

Adicionalmente, si consideramos el subespacio vectorial

$$h(J) = [L(J), L(J)] \oplus L(J),$$

tenemos que $h(J)$ es un ideal de $g(J)$ ya que $[L(J), L(J)]$ es un ideal de $Der(J)$. Además, $T \mapsto T^*$ aplica $h(J)$ en sí mismo.

Finalmente, para tener todos los elementos necesarios para la construcción TKK consideremos el pareo $\square : J \times J \rightarrow h(J)$ definido por

$$a \square b := 2([L_a, L_b] + L_{ab}), \quad \forall a, b \in J,$$

el cual es una transformación bilineal. Como $a \square e = 2L_a$, se tiene que $h(J)$ está generado por la imagen de $J \times J$ y se tienen las identidades

$$(a \square b)^* = b \square a$$

y

$$(a \square b)c = (c \square b)a,$$

para todo $a, b \in J$.

Además, se tiene que un endomorfismo T de J está en $g(J)$ sí y sólo si existe un endomorfismo S de J tal que

$$[T, a \square b] = Ta \square b + a \square Sb,$$

para $a, b \in J$. En este caso, se tiene que $S = -T^*$.

Ya tenemos todos los elementos necesarios para hacer la construcción TKK. Para comenzar, tomemos un álgebra de Jordan unital, con unidad e , y consideremos una copia isomórfica \bar{J} de J , con isomorfismo $a \mapsto \bar{a}$, y formemos el espacio vectorial

$$K(J) := g(J) \oplus J \oplus \bar{J}. \quad (1.9)$$

Si escribimos los elementos de $K(J)$ en la forma $x_i = T_i + a_i + \bar{b}_i$, para $i = 1, 2$, definimos sobre $K(J)$ el corchete bilineal de la siguiente manera:

$$[x_1, x_2] := T \oplus a \oplus \bar{b}, \quad (1.10)$$

donde

$$T := [T_1, T_2] + a_1 \square b_2 - a_2 \square b_1,$$

$$a := T_1 a_2 - T_2 a_1$$

y

$$b := T_2^* b_1 - T_1^* b_2.$$

Entonces $(K(J), [\cdot, \cdot])$ es un álgebra anticonmutativa, con $g(J)$ una subálgebra y J, \bar{J} subálgebras abelianas de $K(J)$.

Teorema 34 *Si J es una álgebra de Jordan unital, entonces $K(J)$ es un álgebra de Lie.*

Adicionalmente, tenemos que

$$[K(J), J] = h(J) \oplus J \quad \text{y} \quad [[J, K(J)], J] = J.$$

En particular, si tomamos $x \in K(J)$, $a, b \in J$ y definimos

$$a \perp b = a \perp_x b := \frac{1}{2} [[a, x], b],$$

tenemos que \perp es una aplicación bilineal de $J \times J$ en J . El par (J, \perp_x) forma un álgebra de Jordan llamada la mutación de J .

Si en particular tomamos $x = \bar{e}$, tenemos que el producto en J se puede recuperar vía la aplicación \perp , es decir que

$$ab = a \perp_e b = \frac{1}{2} [[a, \bar{e}], b].$$

Lo anterior muestra que J está inmersa en $K(J)$.

Para terminar, consideremos el subespacio vectorial

$$I(J) := h(J) \oplus J \oplus \bar{J}.$$

Para este subespacio tenemos el siguiente resultado.

Lema 35 *Sea J un álgebra de Jordan unital, con unidad e . Entonces $I(J)$ es un ideal de $K(J)$ generado por \bar{e} y los elementos de J . En particular, $[J, \bar{e}] = I(J)$, $[I(J), \bar{e}] = \bar{J}$ y $[J, \bar{J}] = h(J)$.*

Para terminar, mostremos una aplicación de la construcción TKK.

Proposición 36 *Sea J un álgebra de Jordan unital. Entonces el álgebra de Lie $L(J)$ es simple sí y sólo si J es simple.*

Capítulo 2

Algunos resultados sobre diálgebras

El objetivo central de este capítulo es presentar algunos resultados que obtuvimos sobre la estructura del ideal D^{ann} sobre una diálgebra D y su relación con el halo, en el caso unital. Para el caso unital, damos la noción de elemento regular, introducida por R. Felipe en [10], la cual generaliza el concepto de elemento invertible en álgebras asociativas al contexto de las diálgebras. Adicionalmente, introduciremos la noción de diálgebra separable y estudiaremos algunas de sus propiedades básicas, en particular resolveremos el problema de adicionar unidades barra en diálgebras para las diálgebras separables.

Este capítulo está compuesto de dos secciones. En la primera, caracterizamos el ideal D^{ann} , probamos que el halo de una diálgebra es un espacio afin modelado por D^{ann} y mostraremos algunos resultados sobre elementos regulares en diálgebras. En la segunda sección, introduciremos la noción de diálgebra separable vía la caracterización de las diálgebras por módulos sobre álgebras asociativas y probaremos algunas de sus propiedades, en particular probaremos que toda diálgebra separable está inmersa en una diálgebra separable unital.

2.1. Unidades barra y elementos regulares en diálgebras

En esta primera sección caracterizaremos el halo de una diálgebra a través del ideal anulador en una diálgebra y definiremos el concepto de elemento regular en diálgebras, concepto que fué intruducido por R. Felipe en [10]. Además, mostraremos la relación de los elementos regulares y el halo.

Para comenzar, recordemos inicialmente el concepto de subespacio anulador de una diálgebra (ver la definición 17).

Sean (D, \dashv, \vdash) una diálgebra y D^{ann} el subespacio vectorial de D generado por los elementos de la forma $x \dashv y - x \vdash y$, para $x, y \in D$. De acuerdo con la definición de D^{ann} se tiene que:

$$1. \quad x \dashv z = 0 = z \vdash x, \quad (2.1)$$

$$2. \quad x \vdash z = x \vdash z - x \dashv z, \quad (2.2)$$

$$3. \quad z \dashv x = z \dashv x - z \vdash x, \quad (2.3)$$

para todo $x \in D$ y $z \in D^{ann}$.

De las anteriores identidades, se tiene el siguiente resultado

Lema 37 D^{ann} es un ideal en D . Más aún, D es un álgebra asociativa si y sólo si $D^{ann} = \{0\}$.

Definamos ahora los siguientes conjuntos sobre diálgebras, los cuales coinciden con los anuladores a derecha, a izquierda y el anulador en las álgebras asociativas.

Sea D una diálgebra y definamos los conjuntos:

$$Z_{\vdash} = \{z \in D \mid z \vdash x = 0, \forall x \in D\},$$

$$Z_{\dashv} = \{z \in D \mid x \dashv z = 0, \forall x \in D\},$$

y

$$Z_B = Z_{\vdash} \cap Z_{\dashv}$$

Es claro de la definición anterior que $D^{ann} \subset Z_B$. Además, tenemos el siguiente resultado:

Lema 38 Sea (D, \vdash, \dashv) una diálgebra, entonces Z_{\vdash} , Z_{\dashv} y Z_B son ideales de D . Más aún

$$Z_{\star} \star D \subset D^{ann}, \quad D \star Z_{\star} \subset D^{ann}$$

y

$$Z_B \star D \subset D^{ann}, \quad D \star Z_B \subset D^{ann},$$

donde \star representa los productos \vdash y \dashv .

Demostración: Se sigue directamente de las identidades (2.1), (2.2) y (2.3). ■

Además, el álgebra cociente

$$D_{as} = D/D^{ann}$$

es un álgebra asociativa que satisface la siguiente propiedad universal: cualquier homomorfismo $D \rightarrow A$, sobre un álgebra asociativa A , factoriza a través de D_{as} , es decir que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\pi} & D_{as} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & A \end{array}$$

Más aún, el ideal D^{ann} es el menor ideal en D tal que D/D^{ann} es un álgebra asociativa.

Adicionalmente, el álgebra cociente $D^{as} = D/Z_B$ es asociativa y por lo tanto tenemos una extensión central de álgebras asociativas

$$0 \rightarrow D^a \rightarrow D_{as} \rightarrow D^{as} \rightarrow 0,$$

donde $D^a = Z_B/D^{ann}$.

En lo que resta de esta sección trabajaremos con diálgebras unitales y estudiaremos la relación que existe entre el halo, el ideal D^{ann} y los elementos regulares en diálgebras.

Para comenzar, sea (D, \vdash, \dashv, e) una diálgebra unital, con unidad barra específica e , y definamos los conjuntos

$$Z_{\vdash}^e = \{z \in D \mid z \vdash e = 0\},$$

$$Z_{\dashv}^e = \{z \in D \mid e \dashv z = 0\},$$

y

$$Z_B^e = Z_{\vdash}^e \cap Z_{\dashv}^e$$

Los anteriores conjuntos nos permiten tener la siguiente caracterización del ideal D^{ann} .

Teorema 39 *Sea D una diálgebra unital con unidad barra e . Entonces se tiene que $D^{ann} = Z_B = Z_B^e$ y $Z_{\dashv}^e = Z_{\vdash}^e = Z_{\dashv} = Z_{\vdash}$.*

Demostración: Tenemos que $z = z \dashv e - z \vdash e$, para todo $z \in Z_B$, entonces $Z_B \subset D^{ann}$ y por lo tanto $D^{ann} = Z_B$.

De otro lado, sea x un elemento arbitrario en D . Como

$$z \vdash x = (e \vdash z) \vdash x = (e \dashv z) \vdash x,$$

y

$$x \dashv z = x \dashv (z \dashv e) = x \dashv (z \vdash e)$$

tenemos que $Z_{\dashv}^e = Z_{\vdash}^e = Z_{\dashv} = Z_{\vdash}$. ■

El anterior teorema implica la siguiente caracterización del halo.

Corolario 40 Sean D una diálgebra unital con unidad barra e y $H(D)$ el halo de D . Entonces

$$H(D) = \{e + z \mid z \in D^{ann}\}$$

Demostración: Sea $z \in D^{ann}$, entonces $(e + z) \vdash x = e \vdash x + z \vdash x = x$ y $x \dashv (e + z) = x \dashv e + x \dashv z = x$, para todo $x \in D$, y esto implica que $e + z \in H(D)$.

Recíprocamente, si $e' \in H(D)$ tenemos que $e' - e = e' \dashv e - e' \vdash e \in D^{ann}$ y por lo tanto que $e' = e + z$, para algún $z \in D^{ann}$. ■

El anterior corolario nos dice que el halo de una diálgebra es un espacio afín modelado por el ideal D^{ann} .

Para introducir el concepto de elemento regular en diálgebras, primero probaremos el siguiente resultado.

Lema 41 Sea (D, \vdash, \dashv, e) una diálgebra unital. Entonces los elementos $(x \vdash e) - x$ y $(e \dashv x) - x$ están en D^{ann} , para cualquier $x \in D$.

Demostración: Para probar el lema, basta ver que

$$\begin{aligned} (x \vdash e) - x &= (x \vdash e) - (x \dashv e) \\ &= -((x \dashv e) - (x \vdash e)), \end{aligned}$$

y

$$(e \dashv x) - x = (e \dashv x) - (e \vdash x).$$

■

Por conveniencia en la escritura, denotaremos $e_+(x) := (x \vdash e) - x$ y $e_-(x) := (e \dashv x) - x$. Notemos que los elementos $e + e_+(x)$ y $e + e_-(x)$ son unidades barra en D . Adicionalmente, podemos ver que si $x \in D^{ann}$ entonces $e_+(x) = e_-(x) = -x$.

Demos ahora la definición de elemento regular.

Definición 42 Diremos que $x \in D$ es **regular** si existe $y \in D$ tal que

$$x \vdash y = e + e_+(x), \quad (2.4)$$

y

$$y \dashv x = e + e_-(x). \quad (2.5)$$

Llamaremos a y el inverso de x .

De esta definición se sigue que si x es regular, entonces x no puede ser un elemento de D^{ann} .

Es importante notar que si D es un álgebra asociativa, entonces la noción de elemento regular coincide con la noción de elemento invertible en álgebras asociativas y el elemento y es su inverso.

Ahora, para todo $x \in D$ definimos

$$(e - x)^{(\vdash, n)} = (e - x) \vdash (e - x) \vdash \dots \vdash (e - x), \quad (2.6)$$

y

$$(e - x)^{(\dashv, n)} = (e - x) \dashv (e - x) \dashv \dots \dashv (e - x), \quad (2.7)$$

donde en cada producto del lado derecho de (3.8) y (3.9) tenemos n factores. Además, definimos $(e - x)^{(\vdash, 0)} = (e - x)^{(\dashv, 0)} = e$.

Observación 43 Dado un elemento regular $x \in D$, se puede ver que

$$x \vdash (e - x) = (e - x) \dashv x. \quad (2.8)$$

De otro lado, si asumimos que (2.8) se cumple para algún $x \in D$, entonces para todo n se tiene que

$$(e - x)^{(\vdash, n)} = (e - x)^{(\dashv, n)}. \quad (2.9)$$

De lo anterior, se sigue que

Proposición 44 Sea D una diálgebra unital, con unidad barra e . Si existe un elemento $x \in D$ que satiface $(x - e)^{(\dashv, n)} \in D^{ann}$, entonces existe $z_+ \in D$ tal que

$$x \vdash z_+ = e + e_+(x).$$

Además, si (2.8) se cumple entonces x es un elemento regular en D .

Demostración: Definimos $z_{\vdash} = e + (e - x) + (e - x)^{(\vdash, 2)} + \dots + (e - x)^{(\vdash, n)}$. Ahora, como $(e - x)^{(\vdash, n+1)} = ((e - x)^{(\vdash, n)} \vdash (e - x)) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} x \vdash z_{\vdash} &= (e - (e - x)) \vdash (e + (e - x) + (e - x)^{(\vdash, 2)} + \dots + (e - x)^{(\vdash, n)}) \\ &= (e - x) + (x \vdash e) + (e - x)^{(\vdash, n+1)} \\ &= (e - x) + (x \vdash e) \\ &= e + e_{\vdash}(x). \end{aligned}$$

De (2.8) se sigue que $(e - x)^{(\vdash, m)} = (e - x)^{(\vdash, m)}$, para todo m , y por lo tanto que $(e - x)^{(\vdash, n)} = (e - x)^{(\vdash, n)} \in D^{ann}$. Además $z_{\vdash} \dashv x = e + e_{\dashv}(x)$, es decir que x es regular. ■

2.2. Diálgebras separables

En esta sección estudiaremos el concepto de diálgebra separable y mostraremos un proceso estándar para construir unidades barra en diálgebras separables. Este resultado resuelve parcialmente el problema de adicionar unidades barra a las diálgebras.

Recordemos que en toda diálgebra existen al menos dos ideales propios, D^{ann} y Z_B . Además, si D es una diálgebra unital, entonces $D^{ann} = Z_B$. Por lo tanto si D es una diálgebra, que no es un álgebra asociativa, entonces D^{ann} es un ideal no trivial de D .

De lo anterior, tenemos que el concepto de álgebra asociativa simple no se puede extender, de manera análoga, al contexto de diálgebras. Por lo tanto tenemos la siguiente definición.

Definición 45 *Sea D una diálgebra. Diremos que D es una diálgebra simple si los únicos ideales en D son: $\{0\}$, D^{ann} y D .*

De la anterior definición, tenemos que si D es una diálgebra simple, entonces $D^{ann} = Z_B$.

Teniendo en cuenta la anterior definición, consideraremos un caso particular de diálgebras sobre las cuales estudiaremos algunas propiedades referentes a la existencia de unidades barra.

Iniciaremos con el siguiente ejemplo de diálgebras (ver [29]), la cual es unital y sus unidades barra están caracterizadas.

Ejemplo 46 Sea A un álgebra asociativa. Sobre el espacio vectorial $D_\times := A \times A$ definimos los productos

$$(a, b) \dashv (c, d) := (a, bcd)$$

y

$$(a, b) \vdash (c, d) := (abc, d),$$

para todo $a, b, c, d \in A$, tenemos que $(D_\times, \dashv, \vdash)$ es una diálgebra.

Si el álgebra asociativa A es unital, entonces el elemento $(1, 1)$ es una unidad barra en D_\times . Más aún, para todo elemento invertible $a \in A$, con inverso a^{-1} , se tiene que (a, a^{-1}) es una unidad barra de D_\times .

Como la idea central en esta sección es construir unidades barra en diálgebras separables, construiremos ahora una diálgebra que nos permitirá ver la importancia de estudiar diálgebras separables y que además nos servirá de base para su definición.

Recordemos que toda diálgebra está caracterizada por bimódulos sobre álgebras asociativas (ver el ejemplo 18 y la proposición 19 en la sección 1.2). De acuerdo con esto consideremos la siguiente construcción:

Sean D una diálgebra y D_{as} su álgebra asociativa canónica. Consideremos el espacio vectorial generado por la suma directa de los espacios D y D_{as} . Sobre $D_D := D_{as} \oplus D$ definimos los productos bilineales $\dashv, \vdash: D_D \times D_D \rightarrow D_D$ por

$$(\bar{a} + b) \dashv (\bar{c} + d) := \bar{a}\bar{c} + b \cdot \bar{c} = \bar{a}\bar{c} + b \dashv c$$

y

$$(\bar{a} + b) \vdash (\bar{c} + d) := \bar{a}\bar{c} + \bar{a} \cdot d = \bar{a}\bar{c} + a \vdash d.$$

No es difícil ver que (D_D, \dashv, \vdash) es una diálgebra. Además, los conjuntos $\{\bar{0}\} \oplus D^{ann}$ y $\{\bar{0}\} \oplus D$ son ideales en D_D .

De otro lado, usando la definición de $(D_D)^{ann}$ y $Z_B(D_D)$ vemos que

$$\{\bar{0}\} \oplus D^{ann} \subseteq (D_D)^{ann} \subseteq \{\bar{0}\} \oplus D \subseteq Z_B(D_D).$$

Si construimos el álgebra cociente $D_D/(\{\bar{0}\} \oplus D^{ann})$, vemos que es un álgebra asociativa y por lo tanto se tiene que

$$\{\bar{0}\} \oplus D^{ann} = (D_D)^{ann},$$

dada la minimalidad de $(D_D)^{ann}$ con respecto a la propiedad de que el álgebra cociente generada en una diálgebra vía un ideal interno sea un álgebra asociativa.

En este ejemplo, tenemos un ideal I tal que $(D_D)^{ann} \subseteq I \subseteq Z_B(D_D)$ y D_D es la suma directa de I con un álgebra asociativa A , es decir que

$$D_D = I \oplus A,$$

donde $I = D$ y $A = D_{as}$ en este caso.

Dado que esta construcción se genera a partir de una diálgebra arbitraria, entonces tenemos argumentos suficientes para considerar que las diálgebras que tienen esta estructura son importantes en el estudio de las diálgebras.

Otra razón para justificar su estudio está dada por la caracterización que presentó M. Kinyon para las álgebras de Leibniz (ver sección 1.1), la cual afirma que todas las álgebras de Leibniz son en esencia subálgebras del álgebra $gl(V) \oplus V$, la cual corresponde a una estructura similar a la que tiene la diálgebra D_D . Más aún, conjeturamos que las diálgebras están caracterizadas de manera similar a las álgebras de Leibniz, dada su relación functorial.

Todo lo anterior nos lleva a introducir la siguiente clase de diálgebras.

Definición 47 *Sea D una diálgebra. Diremos que D es **separable** si existen un ideal I en D , con $D^{ann} \subseteq I \subseteq Z_B(D)$, y una subdiálgebra A de D tales que D es la suma directa de I y A , es decir*

$$D = I \oplus A.$$

Veamos ahora un ejemplo de diálgebra separable. El ejemplo que presentaremos es la diálgebra que genera el álgebra de Leibniz $gl(V) \oplus V$.

Ejemplo 48 *Sea V un espacio vectorial arbitrario no trivial y consideremos el álgebra asociativa de transformaciones lineales sobre V , $End(V)$. Sobre el espacio $V \oplus End(V)$ definimos los productos*

$$(u + A) \dashv (v + B) := Bu + BA$$

$$(u + A) \vdash (v + B) := BA,$$

para todo $u, v \in V$ y $A, B \in End(V)$. Luego $(V \oplus End(V), \dashv, \vdash)$ es una diálgebra.

En esta diálgebra tenemos que

$$(V \oplus End(V))^{ann} \cong V \cong Z_B(V \oplus End(V)).$$

Es claro que esta diálgebra es separable, con ideal de separación $V \oplus \{0\}$. Además, la subdiálgebra $End(V)$ es un álgebra asociativa con unidad Id (la transformación identidad sobre V), pero Id no genera una unidad sobre $V \oplus End(V)$. Más aún, esta diálgebra no tiene unidades barra. En efecto, si $(u + A)$ fuera una unidad barra entonces se tendría que $(0 + BA) = (u + A) \dashv (v + B) = (v + B)$, es decir que $v = 0$ y $A = Id$, para todo $v \in V$, y por lo tanto V es un espacio trivial, lo cual contradice el hecho de que V es no trivial.

Antes de terminar es importante recordar que toda álgebra de Leibniz es isomorfa a una subdiálgebra de un álgebra de Leibniz canónica generada por una diálgebra unital, por lo tanto debe ser posible construir unidades barra sobre $(V \oplus End(V), \dashv, \vdash)$.

De este ejemplo se tiene la siguiente observación, que es importante para el concepto de unidad barra sobre diálgebras.

Observación 49 *El ejemplo anterior muestra una diálgebra sin unidades barra para el cual los ideales D^{ann} y $Z_B(D)$ coinciden. Por lo tanto, el recíproco del teorema 39 no se cumple, es decir que la condición $D^{ann} = Z_B(D)$ es una condición necesaria para la existencia de unidades barra en diálgebras, pero no suficiente.*

Este ejemplo y el ejemplo introductorio nos permiten ver que sobre diálgebras separables se cumple la siguiente propiedad.

Lema 50 *Sea $D = I \oplus A$ una diálgebra separable, entonces la subdiálgebra A es un álgebra asociativa, es decir que los productos \dashv y \vdash coinciden sobre A .*

Demostración: La prueba se sigue de que $a \dashv b - a \vdash b \in A \cap D^{ann}$, para todo $a, b \in A$, y que $D^{ann} \cap A \subseteq I \cap A = \{0\}$. ■

Lo anterior nos muestra que las álgebras separables son la suma directa de un ideal y un álgebra asociativa.

A continuación estudiaremos las propiedades básicas de las diálgebras separables y en lo que resta de esta sección solo consideraremos este tipo de diálgebras.

Supongamos que $D = I \oplus A$ es una diálgebra separable. Los productos sobre D quedan determinados de la siguiente manera:

$$(i + a) \dashv (j + b) = (i \dashv b) + (a \dashv b)$$

$$(i + a) \vdash (j + b) = (a \vdash j) + (a \vdash b),$$

para todo $i, j \in I$ y $a, b \in A$. Es decir que los elementos de I no actúan sobre el lado barra de los productos.

Teniendo en cuenta lo anterior y el hecho de que toda diálgebra genera un álgebra de Leibniz, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} [i + a, j + b] &= (i + a) \dashv (j + b) - (j + b) \vdash (i + a) \\ &= (i \dashv b) + (a \dashv b) - (b \vdash i) - (b \vdash a) \\ &= [i, b] + [a, b]_{Lie} \end{aligned}$$

Por lo tanto el corchete de Leibniz definido por la diálgebra separable D tiene la estructura de un corchete sobre un álgebra de Leibniz separable. Si tenemos en cuenta que I es un ideal y A es una subálgebra (un álgebra de Lie con respecto al corchete

de Leibniz) del álgebra de Leibniz D_{Leib} y que D_{Leib} es la suma directa de I con A , entonces basta verificar que

$$(D_{Leib})^{ann} \subseteq I \subseteq Z^r(D_{Leib}),$$

para probar que las diálgebras separables generan álgebras de Leibniz separables.

De la definición de L^{ann} se tiene que $(D_{Leib})^{ann} = \langle [i, b] | i \in I, b \in A \rangle \subseteq I$. De otro lado, tenemos que $j \in Z^r(D_{Leib})$, para todo $j \in I$, ya que $[i + a, j] = 0$. Por lo tanto $I \subseteq Z^r(D_{Leib})$. De acuerdo con lo anterior tenemos el siguiente resultado.

Lema 51 *Toda diálgebra separable genera un álgebra de Leibniz separable.*

Es importante notar que aunque el ideal I y el álgebra asociativa A , en la descomposición de la diálgebra separable, generan una descomposición sobre el álgebra de Leibniz D_{Leib} , lo mismo no sucede con los ideales $(D_{Leib})^{ann}$ y $Z^r(D_{Leib})$. Por ejemplo, si la diálgebra D es unital, con unidad barra e , se tiene que $e \notin Z_B D$ y $e \in Z^r(D_{Leib})$.

En general, para toda álgebra de Leibniz L , generada por una diálgebra D , se tiene que

$$L^{ann} \subseteq D^{ann} \subseteq Z_B(D) \subseteq Z^r(L).$$

Siguiendo con el análisis sobre las diálgebras separables, consideremos el caso de las diálgebras unitales y veamos como se comportan las unidades barra en este caso.

Lema 52 *Sea $D = I + A$ una diálgebra separable unital. Entonces $I = D^{ann}$ y existe un único elemento $\epsilon \in A$, tal que ϵ es una unidad en A y $H(D) = \{\epsilon + z | z \in D^{ann}\}$*

Demostración: Sea e la unidad barra específica en D , entonces se tiene por el teorema 39 que $D^{ann} = I = Z_B(D)$ y por la definición de diálgebra separable que existen elementos únicos $z \in D^{ann}$ y $\epsilon \in A$ tales que $e = z + \epsilon$. Del corolario 40 se sigue que $H(D) = \{e + z | z \in D^{ann}\}$, luego para la unidad barra $e' = z + \epsilon$ se tiene que

$$i + a = (i + a) \dashv (z + \epsilon) = (i \dashv \epsilon) + (a \dashv \epsilon).$$

Por lo tanto $i = i \dashv \epsilon$, para todo $i \in D^{ann}$ y $a = a \dashv \epsilon$, para todo $a \in A$. De manera análoga se muestra que $i = \epsilon \dashv i$, para todo $i \in D^{ann}$, y $a = \epsilon \dashv a$, para todo $a \in A$. Por lo tanto ϵ es una unidad barra en D y es una unidad sobre el álgebra asociativa A . Además, ϵ es el único elemento en A que es unidad sobre A . En efecto, supongamos que existe una unidad barra $\epsilon' \in A$ que es unidad sobre A , entonces se tiene que

$$\epsilon - \epsilon' = \epsilon \dashv \epsilon' - \epsilon \dashv \epsilon' \in D^{ann} \cap A = \{0\},$$

es decir que $\epsilon = \epsilon'$. ■

Es importante que notemos que el recíproco del lema anterior es falso, es decir que existen diálgebras separables sin unidades barra tales que el álgebra asociativa en la suma directa es unital, tal como sucede con la diálgebra $(V \oplus \text{End}(V), \dashv, \vdash)$.

El punto importante en esta parte es: *podemos tener diálgebras separables construidas a partir de un álgebra asociativa unital tal que la unidad sobre el álgebra asociativa no es una unidad sobre la diálgebra.*

Para las álgebras asociativas se tiene un proceso estándar para adicionar unidades, es decir que siempre que se tenga un álgebra asociativa sin unidad es posible hacer una inmersión de esta en un álgebra asociativa unital. Usaremos esta idea para construir unidades barra en el caso de diálgebras separables.

La idea básica es que dada una diálgebra separable, podemos construir una diálgebra unital tal que la diálgebra inicial este inmersa en la construida y que si la diálgebra es un álgebra asociativa, entonces la construcción coincide con la clásica.

Para comenzar, supongamos que $D = I \oplus A$ es una diálgebra separable no unital y consideremos el siguiente espacio vectorial

$$\widehat{D} := \mathbb{K} \oplus D,$$

donde \mathbb{K} es el campo sobre el cual está definida la diálgebra. Sobre el espacio \widehat{D} definimos los siguientes productos

$$(\alpha + (u + x)) \dashv (\beta + (v + y)) := (\alpha\beta) + (\beta u + \beta x + \alpha y + u \dashv y + x \dashv y) \quad (2.10)$$

y

$$(\alpha + (u + x)) \vdash (\beta + (v + y)) := (\alpha\beta) + (\alpha v + \alpha y + \beta x + x \vdash v + x \vdash y) \quad (2.11)$$

Con respecto a estos productos, tenemos el siguiente resultado

Teorema 53 $(\widehat{D}, \dashv, \vdash)$ es una diálgebra unital separable, con respecto a los productos (2.10) y (2.11). Más aún, el elemento $\widehat{1} := 1 + \theta$, donde $1 \in \mathbb{K}$ es el elemento unidad y θ es el elemento neutro en D , es la unidad barra principal en \widehat{D} . Además, el halo de esta diálgebra es el conjunto $\{\widehat{1} + x | x \in Z_B(D)\}$, $\widehat{D}^{ann} = \mathbb{K} \oplus Z_B(D)$ y la diálgebra D está inmersa en \widehat{D} .

Demostración: Para verificar que \widehat{D} es una diálgebra basta verificar los axiomas, los cuales se siguen directamente del hecho de que D es una diálgebra.

Un simple cálculo muestra que $\widehat{1}$ es una unidad barra en \widehat{D} . Las caracterizaciones del halo y el \widehat{D}^{ann} se siguen directamente del teorema 39 y el corolario 40.

Finalmente, para probar que D está inmersa en \widehat{D} , basta decir que D es isomorfa a la subdiálgebra $\{0\} \oplus D$. ■

El teorema anterior soluciona el problema de adicionar unidades barra en diálgebras en el caso en que estas sean separables.

Para el problema general la idea es probar que de algún modo toda diálgebra se puede ver como una diálgebra separable.

Capítulo 3

Álgebras cuasi-Jordan

En este capítulo introduciremos una nueva estructura algebraica de tipo Jordan y estudiaremos algunas de sus propiedades. Esta nueva estructura, llamada *álgebras cuasi-Jordan*, surge de trasladar el producto de Jordan del contexto de las álgebras asociativas al de las diálgebras.

Además, mostraremos la relación existente entre los ideales \mathfrak{S}^{ann} y $Z^r(\mathfrak{S})$, caracterizaremos las unidades a derecha, estudiaremos las álgebras de Jordan separables y el concepto de derivación a izquierada y a derecha.

De las 6 secciones en las que está dividido este trabajo, en la primera introducimos las álgebras cuasi-Jordan que son una generalización de las álgebras de Jordan, donde la identidad conmutativa es cambiada por la *conmutatividad a derecha* y una forma especial de la identidad de Jordan se conserva.

En la segunda sección probaremos algunos resultados sobre la relación existente entre las álgebras de Jordan y las cuasi-Jordan. Además, compararemos las álgebras cuasi-Jordan con las álgebras de Jordan no conmutativas.

De otro lado, en la siguiente sección estudiaremos las propiedades del ideal anulador sobre álgebras cuasi-Jordan y su relación con unidades a derecha.

En la cuarta sección definiremos el concepto de álgebra cuasi-Jordan separable y mostraremos un método estándar para adicionar unidades en este tipo de álgebras. Además, caracterizaremos las álgebras cuasi-Jordan por medio de las álgebras cuasi-Jordan separables.

En la siguiente sección definiremos el concepto de elemento invertible a partir de la noción de elemento regular en diálgebras y elementos invertibles en álgebras de Jordan. Además, definiremos la representación cuadrática generalizada y mostramos algunas de sus propiedades.

La última sección, la dedicaremos a estudiar los conceptos de derivación a izquierda y a derecha, que son análogos al concepto de anti-derivación sobre álgebras de Leibniz. Además, mostraremos que existe el concepto de derivación interna y derivación a

izquierda interna sobre álgebras cuasi-Jordan generadas por diálgebras.

3.1. Surgimiento de las Álgebras cuasi-Jordan

El objetivo central de esta sección es desarrollar una nueva generalización de las álgebras de Jordan. Esta nueva generalización de las álgebras de Jordan surge de extender el producto de Jordan al caso de diálgebras, es decir en el estudio del producto

$$x \triangleleft y := \frac{1}{2}(x \dashv y + y \vdash x),$$

donde x y y son elementos en una diálgebra D sobre un campo \mathbb{K} de característica diferente de 2. Esta estructura también aparece asociada a otros productos definidos sobre bimódulos de Jordan y el espacio vectorial de transformaciones lineales.

Comencemos trasladando el producto de Jordan sobre álgebras asociativas al contexto de las diálgebras. Para ello consideremos una diálgebra D sobre un campo \mathbb{K} de característica diferente de 2 y definamos el producto $\triangleleft : D \times D \rightarrow D$ por

$$x \triangleleft y := \frac{1}{2}(x \dashv y + y \vdash x), \quad (\triangleleft 1)$$

para todo $x, y \in D$.

Usando los axiomas de diálgebras y haciendo algunos cálculos simples, vemos que el producto \triangleleft satisface las identidades

$$x \triangleleft (y \triangleleft z) = x \triangleleft (z \triangleleft y) \quad (\text{QJ1})$$

$$(y \triangleleft x) \triangleleft x^2 = (y \triangleleft x^2) \triangleleft x \quad (\text{QJ2})$$

$$x^2 \triangleleft (x \triangleleft y) = x \triangleleft (x^2 \triangleleft y), \quad (\text{QJ3})$$

pero el producto \triangleleft en general no es conmutativo.

Nota 54 *F. Chapoton introdujo la noción de diálgebra conmutativa. Una diálgebra D es conmutativa si el álgebra de Leibniz D_{Leib} tiene un producto trivial (es decir, si $x \dashv y = y \vdash x$, para todo x, y en D (ver [7])). En este caso, si D es una diálgebra conmutativa y consideramos el producto definido por $x \triangleleft y := x \dashv y$, entonces (D, \triangleleft) es un álgebra asociativa y satisface la identidad*

$$x \triangleleft (y \triangleleft z) = x \triangleleft (z \triangleleft y), \quad \text{para todo } x, y, z \in D.$$

Estas álgebras son llamadas **álgebras Perm** (ver [7], página 105).

Si D es una diálgebra unital, con unidad barra específica e , tenemos que $x \triangleleft e = x$, para todo x en D . Esto implica que e es una unidad a derecha para el álgebra (D, \triangleleft) . En este caso tenemos por (QJ2) y (QJ3) que

$$x^2 \triangleleft x = x \triangleleft x^2 \quad (3.1)$$

y

$$x^2 \triangleleft x^2 = (x^2 \triangleleft x) \triangleleft x, \quad (3.2)$$

para todo x, y en D .

Entonces todas las álgebras (D, \triangleleft) que satisfacen las identidades (QJ1), (QJ2) y (QJ3), con unidad a derecha e , definidas sobre un campo de característica cero, son asociativas en potencias. Si D está inmersa en una diálgebra unital, entonces la identidad (3.1) se cumple.

Ahora introduciremos la definición de álgebra cuasi-Jordan.

Definición 55 *Un álgebra cuasi-Jordan es un espacio vectorial \mathfrak{S} , sobre un campo \mathbb{K} de característica diferente de 2, equipado con un producto bilineal $\triangleleft : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ que satisfice*

$$x \triangleleft (y \triangleleft z) = x \triangleleft (z \triangleleft y) \quad (\text{conmutatividad a derecha}) \quad (\text{QJ1})$$

$$(y \triangleleft x) \triangleleft x^2 = (y \triangleleft x^2) \triangleleft x, \quad (\text{identidad de Jordan a derecha}) \quad (\text{QJ2})$$

para todo $x, y, z \in \mathfrak{S}$ y donde $x^2 = x \triangleleft x$.

Notemos que en términos de los operadores de multiplicación a izquierda y a derecha L_x y R_x , respectivamente, definidos para $x \in \mathfrak{S}$ por $L_x(y) = x \triangleleft y$ y $R_x(y) = y \triangleleft x$, para todo $y \in \mathfrak{S}$, las identidades (QJ1) y (QJ2) son equivalentes a las identidades

$$L_x L_y = L_x R_y \quad (\text{QJ1}^*)$$

$$R_x R_{x^2} = R_{x^2} R_x \quad (\text{QJ2}^*)$$

Existe una estructura análoga a las álgebras cuasi-Jordan si definimos el producto $\triangleright : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ por $x \triangleright y := y \triangleleft x$, para todo $x, y \in \mathfrak{S}$. Este producto satisface las identidades

$$(x \triangleright y) \triangleright z = (y \triangleright x) \triangleright z \quad (\text{conmutatividad a izquierda}) \quad (\text{QJ1}')$$

$$x^2 \triangleright (x \triangleright y) = x \triangleright (x^2 \triangleright y), \quad (\text{identidad de Jordan a izquierda}) \quad (\text{QJ2}')$$

para todo $x, y \in \mathfrak{S}$, donde $x^2 = x \triangleright x$.

Como las propiedades de ambas estructuras son completamente análogas, solo consideraremos las álgebras cuasi-Jordan a derecha en este trabajo.

Nota 56 *Las álgebras de Jordan y las álgebras Perm son ejemplos triviales de álgebras cuasi-Jordan.*

3.2. Ejemplos y propiedades de álgebras cuasi-Jordan

En esta sección presentaremos algunos ejemplos de álgebras cuasi-Jordan y probaremos algunas de sus propiedades. En particular, estudiaremos la relación existente entre las álgebras cuasi-Jordan y las álgebras de Jordan no conmutativas.

Para introducir algunos ejemplos relacionados con álgebras de Jordan son necesarias algunas definiciones básicas, las cuales presentaremos a medida que se necesiten.

Primero recordemos la definición de bimódulo de Jordan.

Definición 57 Sean J un álgebra de Jordan y M un espacio vectorial sobre el mismo campo que J . El espacio vectorial M es un **bimódulo de Jordan** para J si existen dos composiciones bilineales $(m, a) \mapsto ma$ y $(m, a) \mapsto am$, para todo $m \in M$ y $a \in J$, que satisfacen las identidades

$$ma = am \quad (3.3)$$

y

$$(a^2, m, a) = (a^2, b, m) + 2(ma, b, a) = 0, \quad (3.4)$$

para todo $m \in M$ y $a, b \in J$, donde (a, b, c) denota el asociador: $(a, b, c) := a(bc) - (ab)c$.

A partir de un álgebra de Jordan y un bimódulo de Jordan, podemos construir el siguiente ejemplo de álgebra cuasi-Jordan.

Ejemplo 58 Sean J un álgebra de Jordan y M un bimódulo de Jordan. Una aplicación lineal $f : M \rightarrow J$ se dice que es **J -equivariante** sobre M si $f(am) = a \bullet f(m)$, para todo $m \in M$ y $a \in J$. Si existe una aplicación J -equivariante f sobre M , entonces definimos el producto $\triangleleft : M \times M \rightarrow M$ por

$$m \triangleleft n = f(n)m, \quad \text{para todo } m, n \in M. \quad (\triangleleft 2)$$

El producto \triangleleft satisface las identidades

$$m \triangleleft (n \triangleleft s) = m \triangleleft (s \triangleleft n) \quad (\text{QJ1})$$

$$(n \triangleleft m) \triangleleft m^2 = (n \triangleleft m^2) \triangleleft m \quad (\text{QJ2})$$

$$m \triangleleft (n \triangleleft m^2) + 2(m^2 \triangleleft n) \triangleleft m = (m \triangleleft n) \triangleleft m^2 + 2m^2 \triangleleft (n \triangleleft m), \quad (\text{QJ4})$$

para todo $m, n, s \in M$.

Si comparamos los productos \triangleleft definidos por $(\triangleleft 1)$ y $(\triangleleft 2)$, ambos satisfacen las identidades $(QJ1)$, $(QJ2)$ y $(QJ4)$, pero la identidad $(QJ3)$ no se satisface para el producto $(\triangleleft 2)$.

Otra manera de definir un producto cuasi-Jordan sobre un álgebra de Jordan y un bimódulo de Jordan es la siguiente: sobre el espacio vectorial $J \times M$, donde J es un álgebra de Jordan y M es un bimódulo de Jordan sobre J , definimos el producto \triangleleft por

$$(a, m) \triangleleft (b, n) = (a \bullet b, mb), \quad \text{para todo } a, b \in J \text{ y } m, n \in M.$$

Por simplicidad escribiremos $(a, m)b = (a \bullet b, mb)$. Este producto es un caso particular del producto definido por $(\triangleleft 2)$. Si definimos el operador de proyección $\pi_J : J \times M \rightarrow J$ por $\pi_J(a, m) = a$, entonces $\pi_J((a, m)b) = a \bullet b = a \bullet \pi_J(b, n)$. Esto es equivalente a que

$$\pi_J((a, m) \triangleleft (b, n)) = \pi_J(a, m) \bullet \pi_J(b, n),$$

para todo $a, b \in J$ y $m, n \in M$.

De lo anterior, se sigue que $J \times M$ es un bimódulo de Jordan sobre J con composiciones bilineales definidas por $a(b, n) = (a \bullet b, an)$ y $(b, m)a = (b \bullet a, ma)$. El operador π_J definido sobre $J \times (J \times M)$ es J -equivariante ya que

$$\pi_J((a, m)b) = \pi_J(a, m) \bullet b, \quad \text{para todo } b \in J \text{ y } (a, m) \in J \times M.$$

Ahora, construiremos un álgebra cuasi-Jordan con respecto a un espacio vectorial y su álgebra de Jordan de transformaciones lineales.

Ejemplo 59 Sea V un espacio vectorial sobre un campo \mathbb{K} de característica diferente de 2 y sea $gl^+(V)$ el álgebra de Jordan de transformaciones lineales sobre V con producto definido por

$$A \bullet B = \frac{1}{2}(AB + BA),$$

donde AB denota la composición de las aplicaciones A y B . Consideramos el espacio vectorial $gl^+(V) \times V$ y definimos sobre este espacio el producto \triangleleft por

$$(A, u) \triangleleft (B, v) = (A \bullet B, Bu), \quad (\triangleleft 4)$$

para todo $A, B \in gl(V)$ y $u, v \in V$. Este producto satisface las identidades

$$(A, u) \triangleleft ((B, v) \triangleleft (C, w)) = (A, u) \triangleleft ((C, w) \triangleleft (B, v)) \quad (QJ1)$$

y

$$((B, v) \triangleleft (A, u)) \triangleleft (A, u)^2 = ((B, v) \triangleleft (A, u)^2) \triangleleft (A, u), \quad (QJ2)$$

para todo $A, B \in gl^+(V)$ y $u, v \in V$, donde $(A, u)^2 = (A, u) \triangleleft (A, u)$.

Esta álgebra es asociativa en potencias y (Id, v) , donde Id denota la aplicación identidad sobre V , es una unidad a derecha la cual no es unidad a izquierda. Además, el producto definido por $(\triangleleft 4)$ no satisface las identidades $(QJ3)$ y $(QJ4)$.

Siguiendo las ideas de Kinyon y Weinstein (ver [20]), en esta parte construiremos álgebras de Jordan a partir de álgebras cuasi-Jordan y mostraremos una propiedad universal sobre homomorfismos de álgebras cuasi-Jordan en álgebras de Jordan.

Para un álgebra cuasi-Jordan \mathfrak{S} , el subespacio $I \subset \mathfrak{S}$ se dice que es un ideal a izquierda (resp. a derecha) si para cualquier $a \in I$ y $x \in \mathfrak{S}$ tenemos $a \triangleleft x \in I$ (resp. $x \triangleleft a \in I$). Si I es ideal a izquierda y a derecha, entonces I se dice que es un ideal bilateral.

Para toda álgebra cuasi-Jordan $(\mathfrak{S}, \triangleleft)$, denotaremos por \mathfrak{S}^{ann} el subespacio de \mathfrak{S} generado por los elementos de la forma $x \triangleleft y - y \triangleleft x$, para todo $x, y \in \mathfrak{S}$.

Si definimos el conjunto

$$Z^r(\mathfrak{S}) := \{z \in \mathfrak{S} \mid x \triangleleft z = 0, \forall x \in \mathfrak{S}\},$$

es claro de la conmutatividad a derecha que $\mathfrak{S}^{ann} \subset Z^r(\mathfrak{S})$, es decir que $x \triangleleft y = 0$, para todo $x \in \mathfrak{S}$, $y \in \mathfrak{S}^{ann}$. Además, tenemos la siguiente propiedad:

Teorema 60 $Z^r(\mathfrak{S})$ y \mathfrak{S}^{ann} son ideales bilaterales de \mathfrak{S} . Más aún, se tiene que

$$Z^r(\mathfrak{S}) \triangleleft \mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}^{ann}$$

Demostración: Es inmediato de las definiciones que $Z^r(\mathfrak{S})$ y \mathfrak{S}^{ann} son ideales a izquierda de \mathfrak{S} . De otro lado, sean $x \in \mathfrak{S}$ y $z \in Z^r(\mathfrak{S})$. Entonces se tiene que

$$z \triangleleft x = z \triangleleft x - x \triangleleft z \in \mathfrak{S}^{ann},$$

es decir que

$$\mathfrak{S}^{ann} \triangleleft \mathfrak{S} \subset Z^r(\mathfrak{S}) \triangleleft \mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}^{ann} \subset Z^r(\mathfrak{S})$$

y por lo tanto el teorema queda probado. ■

El anterior teorema muestra que toda álgebra cuasi-Jordan contiene al menos dos ideales, \mathfrak{S}^{ann} y $Z^r(\mathfrak{S})$. De las propiedades de \mathfrak{S}^{ann} y de la definición de \mathfrak{S} , se tiene el siguiente lema:

Lema 61 Sea \mathfrak{S} un álgebra cuasi-Jordan. Entonces, \mathfrak{S} es un álgebra de Jordan si y sólo si $\mathfrak{S}^{ann} = \{0\}$.

Por lo tanto, toda álgebra cuasi-Jordan, que no sea un álgebra de Jordan, contiene al menos un ideal propio no trivial, el ideal \mathfrak{S}^{ann} , es decir que \mathfrak{S}^{ann} es un ideal de \mathfrak{S} tal que

$$\{0\} \subsetneq \mathfrak{S}^{ann} \subsetneq \mathfrak{S}.$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior, es claro que la noción clásica de álgebra simple no se puede aplicar en álgebras cuasi-Jordan (ni en álgebras de Leibniz). Por lo tanto es necesario introducir una noción de simplicidad en álgebras cuasi-Jordan que sea compatible con la noción de simplicidad en álgebras de Jordan. Esto nos lleva a introducir la siguiente definición.

Definición 62 *Un álgebra cuasi-Jordan \mathfrak{S} se dice que es **simple** si los únicos ideales bilaterales de \mathfrak{S} son $\{0\}$, \mathfrak{S}^{ann} y \mathfrak{S} .*

De acuerdo con esta definición, tenemos que en toda álgebra cuasi-Jordan simple $\mathfrak{S}^{ann} = Z^r(\mathfrak{S})$. Además, si \mathfrak{S} es un álgebra de Jordan, las nociones de simplicidad para álgebras de Jordan y álgebras cuasi-Jordan coinciden.

Sea $(\mathfrak{S}, \triangleleft)$ un álgebra cuasi-Jordan. Para el álgebra cociente $\mathfrak{S}_{Jor} := \mathfrak{S}/\mathfrak{S}^{ann}$, tenemos que \mathfrak{S}_{Jor} es un álgebra de Jordan. Más aún, el ideal \mathfrak{S}^{ann} es el menor ideal bilateral de \mathfrak{S} tal que $\mathfrak{S}/\mathfrak{S}^{ann}$ es un álgebra de Jordan. En efecto, sea I cualquier ideal bilateral en \mathfrak{S} tal que \mathfrak{S}/I es un álgebra de Jordan, entonces $x \triangleleft y - y \triangleleft x + I = I$ y por lo tanto $\mathfrak{S}^{ann} \subset I$.

La aplicación cociente $\pi : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}_{Jor}$ es un homomorfismo entre álgebras cuasi-Jordan. Además, π es universal con respecto a todos los homomorfismos de \mathfrak{S} en cualquier álgebra de Jordan J , es decir que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{S}_{Jor} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & J \end{array}$$

Consideremos ahora un par de ejemplos adicionales.

Ejemplo 63 *Sea V un espacio vectorial 2-dimensional con base $\{e_1, e_2\}$. Si definimos el producto $\triangleleft : V \times V \rightarrow V$ con respecto a e_1 y e_2 por $e_i \triangleleft e_j = e_i$, para $i = 1, 2$, y extendemos el producto a V por linealidad, tenemos que (V, \triangleleft) es un álgebra cuasi-Jordan no conmutativa.*

Ahora, si consideramos el producto simétrico $x \bullet y = \frac{1}{2}(x \triangleleft y + y \triangleleft x)$, para todo $x, y \in V$, entonces (V, \bullet) es un álgebra de Jordan.

El siguiente ejemplo muestra un álgebra cuasi-Jordan para la cual el producto de Jordan no genera un álgebra de Jordan.

Ejemplo 64 Sean J un álgebra de Jordan y M un bimódulo de Jordan tal que la identidad $(a, b, am) = 0$ no se cumple. Entonces el álgebra cuasi-Jordan $(J \times M, \triangleleft)$, con producto \triangleleft definido por $(\triangleleft 3)$, no es un álgebra de Jordan con respecto al producto simétrico (de Jordan)

$$(a, m) \bullet (b, n) = \frac{1}{2}((a, m) \triangleleft (b, n) + (b, n) \triangleleft (a, m))$$

En este punto es importante recordar la definición de álgebra de Jordan no conmutativa (ver [6], sección 6) y estudiar su relación con las álgebras cuasi-Jordan.

Un **álgebra de Jordan no conmutativa** es un espacio vectorial J_n sobre un campo \mathbb{K} con característica diferente de dos dotado de un producto bilineal $\cdot : J_n \times J_n \rightarrow J_n$ que satisface la ley flexible y la identidad de Jordan, es decir que

$$x \cdot (y \cdot x) = (x \cdot y) \cdot x \quad (3.5)$$

$$x^2 \cdot (y \cdot x) = (x^2 \cdot y) \cdot x, \quad (3.6)$$

para todo $x, y \in J_n$.

El siguiente lema da condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra sea un álgebra de Jordan no conmutativa (ver [6], sección 6, fact 4).

Lema 65 Un álgebra A es un álgebra de Jordan no conmutativa si y sólo si es flexible (satisface la ley flexible) y el álgebra A^+ es un álgebra de Jordan ($A^+ = (A, \bullet)$ es un álgebra de Jordan, con $x \bullet y = \frac{1}{2}(x \cdot y + y \cdot x)$).

De acuerdo con el anterior lema, tenemos que las álgebras de Jordan no conmutativas generan álgebras de Jordan con el producto de Jordan.

Observación 66 El lema anterior y el último ejemplo muestran que existen álgebras cuasi-Jordan que no son álgebras de Jordan no conmutativas. Más aún, existen álgebras de Jordan no conmutativas que no son álgebras de cuasi-Jordan. En efecto, sean A un álgebra asociativa y no conmutativa sobre un campo \mathbb{K} (característica $\neq 2$) y $a \in \mathbb{K}$, con $a \neq \frac{1}{2}$. Definimos un nuevo producto sobre A como sigue

$$x \bullet_a y = axy + (1 - a)yx.$$

El álgebra resultante la denotaremos por A^a . Esta álgebra es un álgebra de Jordan no conmutativa, pero no es un álgebra cuasi-Jordan.

Para terminar esta sección, tenemos la siguiente observación.

Observación 67 Sea \mathfrak{S} un álgebra cuasi-Jordan. Si definimos el corchete $[x, y] := x \triangleleft y - y \triangleleft x$ y el asociador $(x, y, z) := x \triangleleft (y \triangleleft z) - (x \triangleleft y) \triangleleft z$, entonces $(\mathfrak{S}, [\cdot, \cdot], (\cdot, \cdot, \cdot))$ es un álgebra de Akiwis (ver [6], sección 8).

3.3. Unidades a derecha y los ideales \mathfrak{S}^{ann} y $Z^r(\mathfrak{S})$

En esta sección definiremos el concepto de unidad a derecha para las álgebras cuasi-Jordan y caracterizaremos el conjunto de unidades a derecha en términos del ideal anulador.

Para comenzar introducimos el concepto de unidad a derecha para álgebras cuasi-Jordan.

Definición 68 *Una unidad a derecha en un álgebra cuasi-Jordan \mathfrak{S} es un elemento e en \mathfrak{S} tal que $x \triangleleft e = x$, para todo $x \in \mathfrak{S}$.*

Sea \mathfrak{S} un álgebra cuasi-Jordan, si existe un elemento ϵ en \mathfrak{S} tal que $\epsilon \triangleleft x = x$, entonces \mathfrak{S} es un álgebra de Jordan clásica y ϵ es una unidad. Por lo tanto sólo podemos tener unidades a derecha sobre álgebras cuasi-Jordan que no sean álgebras de Jordan.

Observación 69 *Es posible adicionar una unidad a cualquier álgebra de Jordan, pero en el caso de las álgebras cuasi-Jordan el problema de adicionar unidades a derecha es un problema abierto. En la siguiente sección, daremos una solución parcial al problema de adicionar unidades a derecha en álgebras cuasi-Jordan.*

Es importante notar que las unidades a derecha en álgebras cuasi-Jordan no son únicas (ver ejemplos 63 y 71).

Notación 70 *Denotamos por $U_r(\mathfrak{S})$ el conjunto de todas las unidades a derecha de un álgebra cuasi-Jordan \mathfrak{S} . Un álgebra cuasi-Jordan unitaria a derecha o unital es un álgebra cuasi-Jordan con una unidad a derecha específica e .*

El siguiente ejemplo exhibe un álgebra cuasi-Jordan con varias unidades a derecha.

Ejemplo 71 *Sea V un espacio vectorial y fijemos $\varphi \in V'$, con $\varphi \neq 0$. Definimos el producto $\triangleleft : V \times V \rightarrow V$ por $x \triangleleft y = \varphi(y)x$, para todo $x, y \in V$. Entonces (V, φ) es un álgebra cuasi-Jordan y todos los elementos x en V tales que $\varphi(x) \neq 0$ definen una unidad a derecha $x/\varphi(x)$. Por lo tanto, $U_r(V)$ es un espacio afín modelado por $\text{Ker } \varphi$.*

A continuación caracterizaremos el conjunto $U_r(\mathfrak{S})$ de todas las unidades a derecha en términos del ideal anulador \mathfrak{S}^{ann} .

Lema 72 Sea \mathfrak{S} un álgebra cuasi-Jordan unital a derecha, con unidad a derecha específica e . Entonces

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}^{ann} &= Z^r(\mathfrak{S}), \\ \mathfrak{S}^{ann} &= \{x \in \mathfrak{S} \mid e \triangleleft x = 0\}\end{aligned}$$

y

$$U_r(\mathfrak{S}) = \{x + e \mid x \in \mathfrak{S}^{ann}\}$$

Demostración: Para todo $z \in Z^r(\mathfrak{S})$, tenemos que $z = z \triangleleft e - e \triangleleft z \in \mathfrak{S}^{ann}$, es decir que $\mathfrak{S}^{ann} = Z^r(\mathfrak{S})$. Además es claro que $\mathfrak{S}^{ann} \subset \{x \in \mathfrak{S} \mid e \triangleleft x = 0\}$.

Ahora, sea $x \in \mathfrak{S}$ tal que $e \triangleleft x = 0$, entonces $x = x \triangleleft e - e \triangleleft x \in \mathfrak{S}^{ann}$. Luego para todo $y \in \mathfrak{S}$ se tiene que $y \triangleleft (e + x) = y \triangleleft e = y$ y por lo tanto $e + x \in U_r(\mathfrak{S})$, para todo $x \in \mathfrak{S}^{ann}$.

Recíprocamente, para cualquier $e' \in U_r(\mathfrak{S})$ se tiene que $e' - e = e' \triangleleft e - e \triangleleft e' \in \mathfrak{S}^{ann}$, osea que existe $x \in \mathfrak{S}^{ann}$ tal que $e' = e + x$. ■

Nota 73 Todo lo anterior muestra que el ideal \mathfrak{S}^{ann} juega un papel predominante en el concepto de álgebras cuasi-Jordan, y por lo tanto el desarrollo de la teoría de las álgebras cuasi-Jordan dependerá fuertemente del ideal \mathfrak{S}^{ann} .

3.4. Álgebras cuasi-Jordan que se separan sobre ideales

En esta sección estudiaremos una clase especial de álgebras cuasi-Jordan, las llamadas álgebras cuasi-Jordan separables. En particular, sobre esta clase de álgebras adicionaremos unidades a derecha.

La importancia de estudiar este tipo de álgebras cuasi-Jordan radica en que existe una fuerte relación entre ellas y las álgebras cuasi-Jordan, como lo veremos a continuación.

En lo que sigue busquemos caracterizar todas las posibles estructuras de álgebra cuasi-Jordan que se pueden definir sobre un espacio vectorial arbitrario. Para comenzar este análisis, primero caracterizaremos todos las posibles productos que se puedan definir sobre un espacio vectorial V usando una transformación lineal $f : V \rightarrow \text{End}(V)$.

De acuerdo con esto, sean V un espacio vectorial arbitrario sobre un campo \mathbb{K} de característica diferente de dos y supongamos que sobre el espacio de transformaciones lineales $\text{End}(V)$ esta definido un producto bilineal \bullet tal que $J(V) := (\text{End}(V), \bullet)$ es un álgebra de Jordan. Entonces el espacio vectorial $(V \oplus J(V), \triangleleft)$, con producto

bilineal \triangleleft definido por $(u + A) \triangleleft (v + B) := Bu + A \bullet B$, para todo $u, v \in V$ y $A, B \in J(V)$, es un álgebra cuasi-Jordan.

Ahora, para cualquier transformación lineal $f : V \rightarrow J(V)$, se tiene que el subespacio vectorial $\mathcal{G}_f(V) := \{(u + f_u) | u \in V\}$ es una subálgebra del álgebra cuasi-Jordan $(V \oplus J(V), \triangleleft)$ sí y sólo si se cumple la identidad

$$f(u) \bullet f(v) = f(f(u)v), \quad \forall u, v \in V.$$

Si se satisface la identidad anterior, tenemos que $f_V := \{f(u) | u \in V\}$ es una subálgebra de $J(V)$, y por lo tanto un álgebra de Jordan.

Usando la anterior equivalencia, supongamos que $\mathcal{G}_f(V)$ es una subálgebra de $(V \oplus J(V), \triangleleft)$. Entonces V con el producto bilineal \triangleleft_f definido por

$$u \triangleleft_f v := f(v)u, \quad \forall u, v \in V, \quad (3.7)$$

es un álgebra cuasi-Jordan. En efecto, para $u, v, w \in V$ se tiene que

$$\begin{aligned} u \triangleleft_f (v \triangleleft_f w) &= f(f(w)v)u = f(v) \bullet f(w)u \\ &= f(w) \bullet f(v)u = f(f(v)w)u \\ &= u \triangleleft_f (w \triangleleft_f v) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (u \triangleleft_f v^2) \triangleleft_f v &= (u \triangleleft_f f(v)v) \triangleleft_f v = f(v)(f(v) \bullet f(v)u) \\ &= f(v)(f(v)f(v)u) = (f(v)f(v))(f(v)u) \\ &= (f(v) \bullet f(v))(f(v)u) = (f(f(v)v))(f(v)u) \\ &= (u \triangleleft_f v) \triangleleft_f v^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumplen las identidades (QJ1) y (QJ2).

De otro lado, supongamos ahora que $f : V \rightarrow \text{End}(V)$ es una transformación lineal tal que V es un álgebra cuasi-Jordan con respecto al producto definido por (3.7). Entonces, tenemos que el espacio vectorial f_V con producto bilineal definido por

$$f(u) \circ f(v) := f(f(u)v), \quad \forall u, v \in V \quad (3.8)$$

es un álgebra de Jordan. Más aún, el espacio $(V \oplus f_V)$ es un álgebra cuasi-Jordan con respecto al producto $\bar{\triangleleft}$ definido por

$$(u + f(v)) \bar{\triangleleft} (w + f(z)) := f(z)u + f(v) \circ f(z), \quad \forall u, v, w, z \in V. \quad (3.9)$$

La prueba de que f_V es un álgebra de Jordan y que $(V \oplus f_V)$ es un álgebra cuasi-Jordan, se sigue directamente de las identidades

$$f(u)v = f(v)u \quad \text{y} \quad f(u)(f(f(u)u)v) = f(f(u)u)(f(u)v).$$

A su vez, estas identidades se prueban a partir del supuesto de que (V, \triangleleft_f) es un álgebra cuasi-Jordan.

Todo lo anterior nos indica que el producto \triangleleft_f define una estructura de álgebra cuasi-Jordan sobre cualquier espacio vectorial V sí y sólo si el subespacio vectorial f_V es un álgebra de Jordan con respecto al producto \circ , y esto a su vez es equivalente a que $\mathcal{G}_f(V)$ es una subálgebra de $(V \oplus J(V), \triangleleft)$.

Teniendo como base el análisis anterior, supongamos ahora que V es un álgebra cuasi-Jordan, es decir supongamos que $V = \mathfrak{S}$ y $(\mathfrak{S}, \triangleleft)$ es un álgebra cuasi-Jordan. Entonces, para la transformación lineal $R : \mathfrak{S} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{S})$ dada por $R_y x := x \triangleleft y$, para todo $x, y \in \mathfrak{S}$ (el operador de multiplicación a derecha sobre \mathfrak{S}), se tiene que $(R_{\mathfrak{S}}, \circ)$ es un álgebra de Jordan con respecto al producto \circ definido por (3.8 y $(\mathfrak{S} \oplus R_{\mathfrak{S}}, \bar{\triangleleft})$ es un álgebra cuasi-Jordan con respecto al producto $\bar{\triangleleft}$ definido por (3.9).

Si consideramos el subespacio vectorial $\mathcal{G}_R(\mathfrak{S}) := \{x + R_x | x \in \mathfrak{S}\}$, se tiene que

$$(x + R_x) \triangleleft (y + R_y) = R_y x + R_y \circ R_x = x \triangleleft y + R_{x \triangleleft y},$$

para todo $x, y \in \mathfrak{S}$, es decir que $\mathcal{G}_R(\mathfrak{S})$ es una subálgebra de $\mathfrak{S} \oplus R_{\mathfrak{S}}$. Además, para el operador de proyección $\pi : \mathcal{G}_R(\mathfrak{S}) \rightarrow \mathfrak{S}$, definido por $\pi(x + R_x) = x$, para todo $x \in \mathfrak{S}$, se tiene que π es un isomorfismo de álgebras cuasi-Jordan. Lo anterior, nos lleva al siguiente resultado.

Teorema 74 *Toda álgebra cuasi-Jordan \mathfrak{S} es isomorfa al álgebra cuasi-Jordan $\mathcal{G}_R(\mathfrak{S})$.*

Del anterior teorema, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 75 *Todas las estructuras de álgebras cuasi-Jordan que se pueden definir sobre un espacio vectorial V vienen dadas por un producto del tipo \triangleleft_f definido en (3.7).*

Para terminar con la caracterización de los posibles productos que definen álgebras cuasi-Jordan, hagamos más general nuestra construcción inicial.

En principio consideramos un álgebra de Jordan $J(V)$ de transformaciones lineales, por lo tanto consideremos ahora el caso más general posible, es decir supongamos que (J, \bullet) es un álgebra de transformaciones lineales definidas sobre V y veamos qué condiciones debe satisfacer el producto \bullet para que $(V \oplus J, \triangleleft)$, definido de igual manera que en el caso de $V \oplus J(V)$, sea un álgebra cuasi-Jordan.

Teniendo en cuenta esto, vemos que $V \oplus J$ es un álgebra cuasi-Jordan si y sólo si J es un álgebra conmutativa en la que se satisface la identidad $A^2A = AA^2$, para todo A en J , donde $A^2 = A \bullet A$ y A^2A denota la composición de las transformaciones A^2 y A (respectivamente para AA^2).

De acuerdo con esto, vemos que para el álgebra de Jordan $R_{\mathfrak{S}}$ tenemos que

$$R_x R_x^2 = R_x(R_x \circ R_x) = R_x R_{x \triangleleft x} = R_{x \triangleleft x} R_x = R_x^2 R_x,$$

para todo $x \in \mathfrak{S}$, por la identidad $(QJ2^*)$.

Si consideramos los ideales \mathfrak{S}^{ann} y $Z^r(\mathfrak{S})$, vemos que

$$\mathcal{G}_R(\mathfrak{S})^{ann} \cong \mathfrak{S}^{ann} \quad y \quad Z^r(\mathcal{G}_R(\mathfrak{S})) \cong Z^r(\mathfrak{S}).$$

El último teorema y las álgebras cuasi-Jordan analizadas en esta sección nos lleva a considerar la clase de álgebras cuasi-Jordan determinadas por la siguiente definición.

Definición 76 Sean \mathfrak{S} un álgebra cuasi-Jordan e I un ideal bilateral de \mathfrak{S} tal que $\mathfrak{S}^{ann} \subset I \subset Z^r(\mathfrak{S})$. Diremos que \mathfrak{S} se **separa** sobre I si existe una subálgebra J de \mathfrak{S} tal que $\mathfrak{S} = I \oplus J$, como suma directa de subespacios.

Es claro de la definición anterior que si \mathfrak{S} se separa sobre un ideal I con complemento J , entonces J es un álgebra de Jordan con respecto al producto \triangleleft restringido a J , es decir que $(J, \triangleleft|_J)$ es un álgebra de Jordan. En efecto, sean $x, y \in J$, entonces $x \triangleleft y$, $y \triangleleft x \in J$ y por lo tanto $x \triangleleft y - y \triangleleft x \in I \cap J = \{0\}$, es decir que $\triangleleft|_J$ es conmutativo y por la identidad de Jordan a derecha sobre \mathfrak{S} se sigue que $(J, \triangleleft|_J)$ es un álgebra de Jordan.

Además, para $u, v \in I$ y $x, y \in J$ se tiene que

$$(u + x) \triangleleft (v + y) = u \triangleleft y + x \triangleleft y,$$

ya que $I \subset Z^r(\mathfrak{S})$.

Recíprocamente, dada un álgebra de Jordan J y un bimódulo de Jordan M sobre J , tomamos la suma directa $\mathfrak{S} := M \oplus J$ y definimos el producto \triangleleft sobre \mathfrak{S} por

$$(u + x) \triangleleft (v + y) = uy + x \bullet y,$$

para todo $u, v \in M$ y $x, y \in J$. Entonces $(\mathfrak{S}, \triangleleft)$ es un álgebra cuasi-Jordan, la cual llamaremos el *producto demisemidirecto* de M con J .

El ideal $\mathfrak{S}^{ann} \cong MJ$ y $Z^r(\mathfrak{S}) = M \oplus \{y \in Z(J) \mid uy = 0, \forall u \in M\}$, donde $Z(J) = \{y \in J \mid x \bullet y = 0, \forall x \in J\}$. Finalmente, $M \cong M \oplus \{0\}$ es un ideal de \mathfrak{S} tal que $\mathfrak{S}^{ann} \subset M \subset Z^r(\mathfrak{S})$. Además $\mathfrak{S}/M \cong J$ y \mathfrak{S} se separa sobre M con complemento J .

Lo anterior nos lleva al siguiente teorema

Teorema 77 Sean \mathfrak{S} un álgebra cuasi-Jordan e I un ideal de \mathfrak{S} tal que $\mathfrak{S}^{ann} \subset I \subset Z^r(\mathfrak{S})$. Entonces \mathfrak{S} se separa sobre I si y sólo si \mathfrak{S} es el producto demisemidirecto de I con un álgebra de Jordan J

La idea esencial de esta parte es construir unidades a derecha sobre álgebras cuasi-Jordan separables, por lo tanto veamos como son estas en el caso unital.

Supongamos que \mathfrak{S} es un álgebra cuasi-Jordan separable unital, con unidad a derecha específica e . Del teorema 72, se tiene que existe un álgebra de Jordan J tal que $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{ann} \oplus J$.

Dado que $e \in \mathfrak{S}$ es una unidad a derecha en \mathfrak{S} , existen $x \in \mathfrak{S}^{ann}$ y $\epsilon \in J$ tal que $e = x + \epsilon$. Si $y + a \in \mathfrak{S}$, con $y \in \mathfrak{S}^{ann}$ y $a \in J$, se tiene que

$$y + a = (y + a) \triangleleft e = (y + a) \triangleleft (x + \epsilon) = y \triangleleft \epsilon + a \triangleleft \epsilon = (y + a) \triangleleft \epsilon.$$

Lo anterior nos indica que ϵ es una unidad a derecha en \mathfrak{S} y es una unidad en el álgebra de Jordan J . Además, se tiene que ϵ es el único elemento en J tal que $x + \epsilon$ es una unidad a derecha en J .

Lo anterior nos indica que las álgebras cuasi-Jordan separables unitales son del tipo $\mathfrak{S}^{ann} + J$, donde J es un álgebra de Jordan unital con unidad ϵ y se tiene que $U_r(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}^{ann} \oplus \{\epsilon\}$.

El recíproco de esta caracterización no es válido, es decir que el hecho de que un álgebra cuasi-Jordan sea separable y el álgebra de Jordan en la descomposición sea unital, no implica que el álgebra cuasi-Jordan sea unital.

En efecto, consideremos los espacios vectoriales $V = (x, y)^{tr}$, con x, y reales y el espacio W de matrices 2×2 sobre los reales de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si tomamos el espacio vectorial $\mathfrak{S} := V \oplus W$ y definimos el producto $\triangleleft : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ como

$$(u + A) \triangleleft (v + B) = Bu + AB,$$

para todo $u, v \in V$ y $A, B \in W$, tenemos que $(\mathfrak{S}, \triangleleft)$ es un álgebra cuasi-Jordan con $\mathfrak{S}^{ann} \cong V$ y W es un subespacio complementario de \mathfrak{S}^{ann} con unidad. Pero \mathfrak{S} no tiene unidades a derecha.

Recordemos que si J es un álgebra de Jordan no unital, entonces el álgebra $\hat{J} := \mathbb{K} \oplus J$, donde \mathbb{K} es el campo sobre el que está definida J , con producto definido por

$$(\alpha + x) \hat{\bullet} (\beta + y) = (\alpha\beta) + (\alpha y + \beta x + x \bullet y),$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $x, y \in J$, es un álgebra de Jordan unital, con unidad $1 + \theta$. Además, $\{0\} \oplus J \cong J$ y J está inmersa en \widehat{J} como una subálgebra.

Haciendo uso de esta construcción, hagamos una nueva construcción de unidades a derecha sobre álgebras cuasi-Jordan separables.

Para iniciar, supongamos que $(\mathfrak{S}, \triangleleft)$ es un álgebra cuasi-Jordan sobre el campo \mathbb{K} que se separa sobre el ideal I , tal que $\mathfrak{S} = I \oplus J$. Consideremos el espacio vectorial $\overline{\mathfrak{S}} := \mathbb{K} \times \mathfrak{S}$ y sobre él definamos el producto $\overline{\triangleleft}$ por

$$(\alpha, u + x)\overline{\triangleleft}(\beta, v + y) := (\alpha\beta, \beta u + \beta x + \alpha y + u \triangleleft y + x \triangleleft y),$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $u, v \in I$ y $x, y \in J$.

El producto $\overline{\triangleleft}$ no es conmutativo y en el caso en que \mathfrak{S} es un álgebra de Jordan, entonces $(\overline{\mathfrak{S}}, \overline{\triangleleft})$ coincide con la construcción clásica de unidades sobre álgebras de Jordan. Además este producto satisface las siguientes identidades, para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$, $u, v, w \in I$ y $x, y, z \in J$:

1. $(0, u + x)\overline{\triangleleft}(0, v + y) = (0, (u + x) \triangleleft (v + y))$
2. $(\alpha, u + x)\overline{\triangleleft}(1, v) = (\alpha, u + x)$
3. $(\alpha, u + x)\overline{\triangleleft}((\beta, v + y)\overline{\triangleleft}(\gamma, w + z)) = (\alpha, u + x)\overline{\triangleleft}((\gamma, w + z)\overline{\triangleleft}(\beta, v + y))$
4. $((\beta, v + y)\overline{\triangleleft}(\alpha, u + x))\overline{\triangleleft}(\alpha, u + x)^2 = ((\beta, v + y)\overline{\triangleleft}(\alpha, u + x)^2)\overline{\triangleleft}(\alpha, u + x)$
5. $(\alpha, u + x)\overline{\triangleleft}(\beta, v + y) = (0, \mathbf{0})$ sí y sólo si $\beta = 0$ y $y = \mathbf{0}$,

donde $(\alpha, u + x)^2 = (\alpha, u + x)\overline{\triangleleft}(\alpha, u + x)$ y $\mathbf{0}$ es el cero de \mathfrak{S} .

Las anteriores identidades nos conducen al siguiente lema.

Lema 78 $\overline{\mathfrak{S}}$ es un álgebra cuasi-Jordan unital, en la cual está inmersa \mathfrak{S} . Además

1. $U_r(\overline{\mathfrak{S}}) = \{1\} \times I \cong I$
2. $\overline{\mathfrak{S}}^{ann} = Z^r(\overline{\mathfrak{S}}) = \{0\} \times I \cong I$
3. $\mathfrak{S} \cong (0, \mathfrak{S})$

Si consideramos el álgebra cuasi-Jordan $\mathcal{G}_R(\mathfrak{S})$, tenemos que en $\overline{\mathcal{G}_R(\mathfrak{S})}$ el producto queda definido por

$$(\alpha, x + R_x)\overline{\triangleleft}(\beta, y + R_y) = (\alpha\beta) + (\beta x + x \triangleleft y + R_{\beta x + \alpha y + x \triangleleft y}),$$

para todo $x, y \in \mathfrak{S}$, y por lo tanto $\mathfrak{S} \cong \mathcal{G}_R(\mathfrak{S}) \cong \{0\} \oplus \mathcal{G}_R(\mathfrak{S})$.

Observación 79 *Del teorema 74 y el lema anterior, se tiene que el estudio de las álgebras cuasi-Jordan se debe desarrollar usando álgebras cuasi-Jordan separables unitales.*

Para terminar, tenemos los siguientes resultados.

Lema 80 *Sea (D, \vdash, \dashv) una diálgebra separable sobre un campo \mathbb{K} de característica diferente de dos. Entonces el álgebra cuasi-Jordan $\mathfrak{S}(D)$ generada por D es separable.*

Demostración: Como D es separable, entonces existe un ideal $D^{ann} \subset I \subset Z_B(D)$ y una subálgebra A en D tales que $D = I \oplus A$. Para producto cuasi-Jordan \triangleleft definido por (4.1), tenemos que

$$\begin{aligned} (x + a) \triangleleft (y + b) &= \frac{1}{2}((x + a) \vdash (y + b) + (y + b) \dashv (x + a)) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x \vdash b + b \dashv x) + \frac{1}{2}(a \vdash b + b \dashv a) \\ &= (x \triangleleft b) + (a \bullet b), \end{aligned}$$

de donde se sigue la afirmación del lema. ■

Corolario 81 *Si D es una diálgebra separable unital, entonces el álgebra cuasi-Jordan $\mathfrak{S}(D)$ es unital.*

3.5. Elementos invertibles en álgebras cuasi-Jordan

Sea $(\mathfrak{S}(D), \triangleleft, e)$ el álgebra cuasi-Jordan asociada a una diálgebra unital (D, \vdash, \dashv, e) con producto definido por

$$x \triangleleft y := \frac{1}{2}(x \dashv y + y \vdash x),$$

Si x es un elemento regular en D , se sigue de (2.4) y (2.5) que existe $y \in D$ para el cual

$$y \triangleleft x = e \triangleleft x + (e - x). \quad (3.10)$$

Definiendo $e_{\triangleleft}(x) = (e \triangleleft x) - x$, se tiene de la ecuación (3.10) que $y \triangleleft x = e + e_{\triangleleft}(x)$, para todo $x \in D$ regular.

Lema 82 *Sea (D, \vdash, \dashv) una diálgebra unital. Entonces $e_{\triangleleft}(x) \in \mathfrak{S}(D)^{ann}$, para todo $x \in D$. Además, $D^{ann} \subset \mathfrak{S}(D)^{ann}$.*

Demostración: Para todo $x \in \mathfrak{S}(D)$, tenemos que

$$z \triangleleft e_{\triangleleft}(x) = z \triangleleft ((e \triangleleft x) - x) = z \triangleleft (e \triangleleft x) - z \triangleleft x = 0.$$

De otro lado, es fácil ver que $D^{ann} \subset \mathfrak{S}(D)^{ann}$. ■

Como demostramos para las álgebras cuasi-Jordan $(\mathfrak{S}(D), \triangleleft, e)$ generadas por diálgebras, la ecuación

$$y \triangleleft x = e + e_{\triangleleft}(x), \quad (3.11)$$

se satisface para todo elemento x y su inverso y en la diálgebra D . Teniendo esto en cuenta, podemos definir la noción de elemento invertible en cualquier álgebra cuasi-Jordan \mathfrak{S} . Sin embargo, es necesaria una condición más.

Para $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(D)$, se sigue de (2.4) y (2.5) que si $x \in D$ es un elemento regular de D entonces

$$y \triangleleft x^2 = x + e_{\triangleleft}(x) + e_{\triangleleft}(x^2), \quad (3.12)$$

para algún $y \in D$. Este elemento y debe coincidir con el término dado en (3.11).

Ahora, estamos en condiciones de dar la definición de elemento invertible para cualquier álgebra cuasi-Jordan unital (\mathfrak{S}, e) , teniendo en cuenta que las ecuaciones (3.11) y (3.12) son básicas para introducir esta noción.

Definición 83 *Sea (\mathfrak{S}, e) un álgebra cuasi-Jordan unital. Decimos que $x \in \mathfrak{S}$ es invertible si existe $y \in \mathfrak{S}$ tal que*

$$y \triangleleft x = e + e_{\triangleleft}(x),$$

y

$$y \triangleleft x^2 = x + e_{\triangleleft}(x) + e_{\triangleleft}(x^2).$$

Llamamos a y el inverso de x en \mathfrak{S} .

Notemos que $e_{\triangleleft}(x)$ y $e_{\triangleleft}(x^2)$ pertenecen a \mathfrak{S}^{ann} . De otro lado, si \mathfrak{S} es un álgebra de Jordan entonces $e_{\triangleleft}(x) = e_{\triangleleft}(x^2) = 0$ y por lo tanto llegamos a la definición clásica de elemento invertible en álgebras de Jordan.

Observación 84 *Es importante observar que si y es el inverso de x y además asumimos que $y \triangleleft x = e + z$ y $y \triangleleft x^2 = x + w$, donde $z, w \in \mathfrak{S}^{ann}$, entonces tenemos que $z = e_{\triangleleft}(x)$ y $w = e_{\triangleleft}(x) + e_{\triangleleft}(x^2)$.*

Recordemos que si (D, \vdash, \dashv) es una diálgebra, entonces en el espacio $End(D)$ de las transformaciones lineales sobre D podemos introducir una estructura de diálgebra (ver [10]). En efecto si fijamos $x_0 \in D$ y definimos para $A \in L(D)$ y $u \in D$

$$(A \vdash B)(u) = Ax_0 \vdash Bu,$$

y

$$(A \dashv B)(u) = Au \dashv Bx_0,$$

se tiene que $L(D)$ es una diálgebra.

Obviamente esto nos permite introducir en $L(\mathfrak{S}(D))$ el producto cuasi-Jordan: $(A \triangleleft B)(u) = \frac{1}{2}((A \dashv B)(u) + (B \vdash A)(u))$. Esto nos conduce al siguiente resultado.

Teorema 85 Sean \mathfrak{S} un álgebra cuasi-Jordan y x_0 un elemento fijo de \mathfrak{S} . Definimos

$$(A \triangleleft B)(u) = Au \triangleleft Bx_0, \quad (3.13)$$

para cualquier $u \in \mathfrak{S}$. Con respecto al producto (3.13) el espacio $L(\mathfrak{S})$ de transformaciones lineales sobre \mathfrak{S} es un álgebra cuasi-Jordan.

Demostración: Para todo $u \in \mathfrak{S}$ se tiene

$$\begin{aligned} (A \triangleleft (B \triangleleft C))(u) &= (A(u) \triangleleft ((B \triangleleft C)(x_0))) = (A(u) \triangleleft ((B(x_0) \triangleleft C(x_0)))) \\ &= (A(u) \triangleleft ((C(x_0) \triangleleft B(x_0)))) = (A(u) \triangleleft ((C \triangleleft B)(x_0))) \\ &= (A \triangleleft (C \triangleleft B))(u), \end{aligned}$$

así $(A \triangleleft (B \triangleleft C)) = (A \triangleleft (C \triangleleft B))$.

La igualdad $((A \triangleleft B) \triangleleft B^2) = ((A \triangleleft B^2) \triangleleft B)$ se prueba de forma análoga. ■

Observemos que si \mathfrak{S} tiene una unidad a derecha e , entonces podemos tomar $x_0 = e$ y el operador identidad I es una unidad a derecha de $L(\mathfrak{S})$.

Ahora, asumamos que $A \in L(\mathfrak{S})$ es invertible entonces se sigue que Ae es un elemento invertible de \mathfrak{S} .

Si consideramos el ejemplo 63 y tomamos como unidad a derecha específica de V a e_1 , entonces es posible mostrar que el conjunto de todos los elementos invertibles de esta álgebra cuasi-Jordan son de la forma $ae + bf$, donde $a + b$ es diferente de cero. Por lo tanto si $f = e_2$, el inverso es

$$\left(\frac{b+1}{a+b}\right)e + \left(\frac{-b}{a+b}\right)f.$$

Supongamos que (\mathfrak{S}, e) es un álgebra cuasi-Jordan con unidad e . Dado $x \in \mathfrak{S}$, sea y tal que $y \triangleleft x = e + e_{\triangleleft}(x)$ y $y \triangleleft x^2 = x + e_{\triangleleft}(x) + e_{\triangleleft}(x^2)$, entonces

$$2L_x^2 y = 2x, \quad (3.14)$$

y

$$R_{x^2}y = x + e_{\triangleleft}(x) + e_{\triangleleft}(x^2). \quad (3.15)$$

Como una consecuencia inmediata de (3.14) y (3.15) se tiene que $(2L^2(x) - R(x^2))y = x - e_{\triangleleft}(x) - e_{\triangleleft}(x^2)$. Por lo tanto

$$L_e(2L_x^2 - L_{x^2})y = e_{\triangleleft}x. \quad (3.16)$$

Por lo tanto definimos la *representación cuadrática generalizada* $P_x : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ como

$$P_x z = L_e(2L_x^2 - L_{x^2})z.$$

Esta definición coincide con la definición de representación cuadrática sobre álgebras de Jordan cuando \mathfrak{S} es un álgebra de Jordan. Observemos que $P(z)e = e_{\triangleleft}z^2$.

Para nuestro propósito es importante obtener la representación cuadrática generalizada del concepto de elemento invertible sin hacer uso explícito de cualquier proceso de linealización.

Proposición 86 Sean \mathfrak{S} un álgebra cuasi-Jordan con unidad e y $Q_x := L_e L_x$, para $x \in \mathfrak{S}$. Entonces

$$[Q_x, P_x] = 0.$$

Demostración: Primero que todo observemos que para todo $x \in \mathfrak{S}$ se tiene que

$$\begin{aligned} Q_x P_x &= L_e L_x L_e (2L_x^2 - L_{x^2}) \\ &= L_e L_x (2L_x^2 - L_{x^2}), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} P_x Q_x &= L_e (2L_x^2 - L_{x^2}) L_e L_x \\ &= L_e (2L_x^2 - L_{x^2}) L_x. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} [Q_x, P_x](u) &= L_e(L_x L_{x^2} - L_{x^2} L_x)(u) \\ &= e_{\triangleleft}(x_{\triangleleft}(x^2_{\triangleleft}u)) - e_{\triangleleft}(x^2_{\triangleleft}(x_{\triangleleft}u)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

por las identidades (QJ1) y (QJ2). ■

Supongamos que $\mathfrak{S} = I \oplus J$ es un álgebra cuasi-Jordan separable. Para $u, v \in I$ y $x, y \in J$, tenemos

$$(u + x)_{\triangleleft}(v + y) = u_{\triangleleft}y + x_{\triangleleft}y,$$

y

$$(v + y) \triangleleft (v + y) = v \triangleleft y + y^2,$$

ya que $I \subset Z^r(\mathfrak{S})$.

Es importante observar que si $e \in \mathfrak{S}$ es una unidad a derecha en \mathfrak{S} y $e = e_I + e_J$, donde $e_I \in \mathfrak{S}^{ann}$ y $e_J \in J$, entonces e_J es la única unidad en J y es también unidad a derecha en \mathfrak{S} .

Teorema 87 *Sea $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{ann} \oplus J$ un álgebra cuasi-Jordan separable sobre \mathfrak{S}^{ann} y sea $v, u \in \mathfrak{S}^{ann}$ y $x, y \in J$. Supongamos que $e \in J$ es una unidad de \mathfrak{S} . Entonces $(v + x)$ es invertible y su inverso es $(u + y)$ sí y sólo si x es invertible en J y su inverso es y . Además*

$$u \triangleleft x = -v,$$

y

$$u \triangleleft x^2 = -v \triangleleft x.$$

Demostración: Para probar el teorema basta observar las ecuaciones

$$(u + y) \triangleleft (v + x) = e + e \triangleleft (v + x) - (v + x)$$

y

$$\begin{aligned} (u + y) \triangleleft (v + x)^2 &= (v + x) + e \triangleleft (v + x) - (v + x) \\ &\quad + e \triangleleft (v + x)^2 - (v + x)^2, \end{aligned}$$

las cuales son equivalentes a las ecuaciones $y \triangleleft x = e, y \triangleleft x^2 = x, u \triangleleft x = -v$ y $u \triangleleft x^2 = -v \triangleleft x$. ■

Supongamos que $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{ann} \oplus J$ es un álgebra cuasi-Jordan separable unital, con unidad a derecha $e \in J$. Entonces si $v \in \mathfrak{S}^{ann}$ y $x \in J$, se tiene que

$$L_{(v+x)^2} = L_{v \triangleleft x} + L_{x^2},$$

y

$$L_{v+x}^2 = L_v L_x + L_x^2.$$

Si tomamos la representación cuadrática generalizada sobre la componente en J de la unidad e , la cual denotaremos por ϵ , se tiene que

$$P_{v+x} = L_\epsilon(2L_v L_x - L_{v \triangleleft x}) + (2L_x^2 + L_{x^2}).$$

Como $P_x^J = 2L^2(x) - L_{x^2}$ es la representación cuadrática usual en el álgebra de Jordan J (ver 1.8, sección 1.4) y $L_\epsilon(2L_v L_x - L_{v \triangleleft x}) = 0$, tenemos que $P_{v+x} = P_x^J$, cuando P está definida sobre ϵ .

Si tomamos la representación cuadrática generalizada sobre la unidad a derecha e , se tiene que

$$P_{v+x} = L_e P_x^J = L_e(2L^2(x) - L_{x^2})$$

De lo anterior, tenemos el siguiente lema.

Lema 88 Sean $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{ann} \oplus J$ un álgebra cuasi-Jordan separable unital, con unidad específica e , $v, u \in \mathfrak{S}^{ann}$ y $x, y \in J$. Si $(u + y)$ es el inverso de $(v + x)$, entonces

$$P_x^J y = x, \quad (3.17)$$

y

$$M_x^J u = -(v \triangleleft x), \quad (3.18)$$

donde $M_x^J = 2R_x^2 - R_{x^2}$. Además, tenemos que

$$[R_x, M_x^J] = 0.$$

Sea \mathfrak{S} un álgebra cuasi-Jordan con unidad e . Supongamos que la transformación lineal d es una derivación sobre \mathfrak{S} , es decir que

$$d(x \triangleleft y) = dx \triangleleft y + x \triangleleft dy, \quad \forall x, y \in \mathfrak{S}.$$

Se sigue directamente de la definición de \mathfrak{S}^{ann} que

$$d\mathfrak{S}^{ann} \subset \mathfrak{S}^{ann}.$$

Además, tenemos el siguiente resultado.

Lema 89 Sea \mathfrak{S} un álgebra cuasi-Jordan con unidad e . Supongamos que d es una derivación sobre \mathfrak{S} y tomemos $d_e = L_e d$. Entonces

$$Q(d_e a) = [d_e, Q_a]. \quad (3.19)$$

Demostración: Como $d(L_a b) = L_{da} b + L_a (db)$, para todo $b \in \mathfrak{S}$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} d_e L_a &= L_e d L_a = L_e L_{da} + L_e L_a d \\ &= Q_{da} + Q_a d. \end{aligned}$$

De otro lado, tenemos que $Q_{da} = Q_{d_e a}$. En efecto,

$$\begin{aligned} Q_{d_e a} &= Q_{L_e(da)} = L_e L_{L_e(da)} = L_e R_{e \triangleleft da} \\ &= L_e R_{da \triangleleft e} = L_e R_{da} = L_e L_{da} \\ &= Q_{da} \end{aligned}$$

De manera similar se prueba que $Q_a d = Q_a L_e d = Q_a d_e$.

Ahora, como $db = d(b \triangleleft e) = db \triangleleft e + \triangleleft de = db + b \triangleleft de$, se tiene que $b \triangleleft de = 0$ y $b \in \mathfrak{S}$ es arbitrario, se tiene que $de \in Z^r(\mathfrak{S})$ y por lo tanto que $R_{de} = 0$. Luego como

$$L_e d L_e = L_e L_{de} + L_e L_e d = L_e R_{de} + L_e R_e d = L_e R_e d$$

y $R_e = Id$, se tiene que

$$\begin{aligned} d_e L_a &= L_e d L_a = L_e R_e d L_a \\ &= L_e d L_e L_a = L_e d Q_a \\ &= d_e Q_a. \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que

$$d_e Q_a = Q_{d_e a} + Q_a d_e,$$

y por lo tanto queda probado (3.19). ■

Observación 90 *Para toda derivación d en un álgebra cuasi-Jordan unital \mathfrak{S} , si e es una unidad a derecha en \mathfrak{S} entonces $de \in Z^r(\mathfrak{S})$.*

3.6. Derivaciones sobre álgebras cuasi-Jordan

En esta sección introduciremos los conceptos de derivación a izquierda y derivación a derecha. Además, mostraremos algunas de sus propiedades básicas. Estas definiciones tienen como objetivo buscar un análogo al concepto de biderivación sobre álgebras de Leibniz en el contexto de las álgebras cuasi-Jordan y construir el análogo del álgebra de Lie de derivaciones internas sobre álgebras de Jordan, para el caso de álgebras de Leibniz y cuasi-Jordan.

La idea esencial es encontrar un álgebra de Leibniz de derivaciones internas sobre un álgebra cuasi-Jordan para poder hacer una inmersión de las álgebras cuasi-Jordan en las álgebras de Leibniz, que generalice la construcción TKK. En la parte final de esta sección logramos mostrar que para el caso de álgebras cuasi-Jordan generadas por diálgebras existe el concepto de derivación interna y de derivación a izquierda interna. Con estas estructuras definimos diderivaciones y construimos un corchete de Leibniz, es decir, obtenemos un álgebra de diderivaciones internas sobre las álgebras cuasi-Jordan generadas por diálgebras.

Recordemos que el álgebra de Lie de las derivaciones internas sobre un álgebra de Jordan es central en la construcción TKK, tal como se vio en la sección 1.5.

Para motivar la idea de que las derivaciones internas a derecha y a izquierda son, en principio, los elementos claves para una posible inmersión de las álgebras cuasi-Jordan en las álgebras de Leibniz, recordemos que las biderivaciones sobre álgebras de Leibniz (ver definición 6) es una generalización de las derivaciones sobre álgebras de Lie, y en particular que el concepto de anti-derivación sobre álgebras de Leibniz coincide con el concepto de derivación en el caso en que el álgebra de Leibniz es de Lie.

Teniendo en cuenta esto, podemos suponer que debemos encontrar una aplicación lineal sobre las álgebras cuasi-Jordan que se comporte de manera similar a las anti-derivaciones sobre álgebras de Leibniz. Es decir, que si el álgebra cuasi-Jordan es un álgebra de Jordan, entonces se tenga una derivación, y además que se pueda definir un corchete de Leibniz con una de estas transformaciones y una derivación.

Teniendo esto en cuenta, introducimos la siguiente definición.

Definición 91 Sea (A, \cdot) un álgebra arbitraria sobre un campo \mathbb{K} . Una aplicación lineal $\Delta : A \rightarrow A$ ($\delta : A \rightarrow A$) se dice que es una derivación a **izquierda** (a **derecha**) si $\Delta(x \cdot y) = \Delta x \cdot y + \Delta y \cdot x$ ($\delta(x \cdot y) = y \cdot \delta x + x \cdot \delta y$), para todo $x, y \in A$.

De la definición anterior, se tienen las siguientes propiedades para derivaciones a izquierda y a derecha.

Lema 92 Sean (A, \cdot) un álgebra, Δ una derivación a izquierda y δ una derivación a derecha sobre A . Entonces

1. $\Delta L_x = \Delta R_x$, para todo $x \in A$.
2. $\delta L_x = \delta R_x$, para todo $x \in A$.
3. Para toda derivación d sobre A , se tiene que $[\Delta, d] = \Delta d - d\Delta$ es una derivación a izquierda sobre A , y que $[\delta, d] = \delta d - d\delta$ es una derivación a derecha sobre A .
4. Una transformación lineal T sobre A es una derivación a izquierda si y sólo si $L_{Tx} = [T, R_x]$, para todo $x \in A$.
5. Una transformación lineal T sobre A es una derivación a derecha si y sólo si $R_{Tx} = [T, L_x]$, para todo $x \in A$.
6. Sean $Der(A)$ el espacio de derivaciones sobre A y $LDer(A)$ el espacio de derivaciones a izquierda sobre A . Sobre el espacio $DL := Der(A) \times LDer(A)$ definimos el corchete $[\cdot, \cdot]': DL \times DL \rightarrow DL$ por

$$[(d, \Delta), (d', \Delta')] := ([d, d'], [\Delta', d]),$$

para todo $d, d' \in Der(A)$ y $\Delta, \Delta' \in LDer(A)$. Entonces $(DL, [\cdot, \cdot]')$ es un álgebra de Leibniz.

7. Sean $Der(A)$ el espacio de derivaciones sobre A y $RDer(A)$ el espacio de derivaciones a derecha sobre A . Sobre el espacio $DR := Der(A) \times RDer(A)$ definimos el corchete $[\cdot, \cdot]': DR \times DR \rightarrow DR$ por

$$[(d, \delta), (d', \delta')] := ([d, d'], [\delta', d]),$$

para todo $d, d' \in Der(A)$ y $\delta, \delta' \in RDer(A)$. Entonces $(DR, [\cdot, \cdot]')$ es un álgebra de Leibniz.

8. Si el producto en A es conmutativo, entonces los espacios $Der(A)$, $LDer(A)$ y $RDer(a)$ son iguales. Además, las álgebras de Leibniz DL y DR son álgebras de Lie isomorfas al álgebra de Lie de derivaciones sobre A .

Es importante notar que las propiedades 1 y 2 son similares a la conmutatividad a derecha sobre álgebras cuasi-Jordan, ya que ésta se puede escribir en la siguiente forma

$$L_x L_y = L_x R_y, \quad \forall x, y \in \mathfrak{S},$$

donde $(\mathfrak{S}, \triangleleft)$ es un álgebra cuasi-Jordan y L_x, R_x representan los operadores de multiplicación a izquierda y a derecha, respectivamente.

Ahora veamos como podemos introducir derivaciones a izquierda sobre álgebras cuasi-Jordan a partir de diálgebras. Para ello, demos la definición de derivación sobre diálgebras y estudiemos las derivaciones internas en ellas.

Definición 93 Sea D una diálgebra, una derivación sobre D es una transformación lineal $d : D \rightarrow D$ tal que d es una derivación con respecto a cada uno de los productos \vdash y \dashv , es decir que

$$d(a * b) = da * b + a * db,$$

para todo $a, b \in D$ y donde $*$ representa a los productos \vdash y \dashv .

Denotaremos por $Der(D)$ al espacio vectorial de las derivaciones sobre D .

Si para $a \in D$ consideramos la transformación lineal $ad_a : D \rightarrow D$ definida por

$$ad_a b = [b, a] = b \dashv a - a \vdash b, \quad \forall b \in D,$$

tenemos que ad_a es una derivación sobre D . En efecto, para $b, c \in D$ se tiene que

$$\begin{aligned} ad_a(b \vdash c) &= (b \vdash c) \dashv a - a \vdash (b \vdash c) \\ &= b \vdash (c \dashv a) - (a \vdash b) \vdash c + (b \vdash a) \vdash c - (b \vdash a) \vdash c \\ &= b \vdash (c \dashv a) - (a \vdash b) \vdash c + (b \dashv a) \vdash c - b \vdash (a \vdash c) \\ &= (b \dashv a) \vdash -(a \vdash b) \vdash c + b \vdash (c \dashv a) - b \vdash (a \vdash c) \\ &= ad_a b \vdash c + b \vdash ad_a c. \end{aligned}$$

De manera análoga se prueba que

$$ad_a(b \dashv c) = ad_a b \dashv c + b \dashv ad_a c.$$

A este tipo de derivaciones las llamaremos *derivación interna* y al conjunto de las derivaciones internas lo denotaremos por $Inn(D)$.

Si para $a \in D$ consideramos la transformación lineal Ad_a definida sobre D por $Ad_a(b) = a \dashv b - b \vdash a$, para todo $b \in D$, tenemos que Ad_a no tiene ninguna de las propiedades de derivación que hemos considerado, salvo en el caso en que D sea un álgebra asociativa.

Ahora, consideremos el álgebra cuasi-Jordan \mathfrak{S}_D generada por la diálgebra D , definida sobre un campo \mathbb{K} de característica diferente de dos, y veamos qué papel juegan las transformaciones ad_a y Ad_a sobre esta álgebra.

Para comenzar, como ad_a es una derivación sobre la diálgebra D se tiene que

$$ad_a(b \triangleleft c) = ad_a b \triangleleft c + b \triangleleft ad_a c,$$

para todo $b, c \in D$, es decir que ad_a es una derivación sobre \mathfrak{S}_D .

De otro lado, si consideramos la transformación Ad_a , tenemos que para todo $b, c \in D$ se cumple que

$$\begin{aligned} Ad_a b \triangleleft c + Ad_a c \triangleleft b &= (a \dashv b - b \vdash a) \triangleleft c + (a \dashv c - c \vdash a) \triangleleft b \\ &= \frac{1}{2} ((a \dashv b) \dashv c - (b \vdash a) \dashv c + c \vdash (a \dashv b) - c \vdash (b \vdash a)) \\ &\quad + \frac{1}{2} ((a \dashv c) \dashv b - (c \vdash a) \dashv b + b \vdash (a \dashv c) - b \vdash (c \vdash a)) \\ &= \frac{1}{2} (a \dashv (b \dashv c) + a \dashv (c \vdash b) - (b \dashv c) \vdash a - (c \vdash b) \vdash a) \\ &= a \dashv (b \triangleleft c) - (b \triangleleft c) \vdash a \\ &= Ad_a(b \triangleleft c) \end{aligned}$$

y por lo tanto Ad_a es una derivación a izquierda sobre \mathfrak{S}_D .

Esto afirma la suposición de que las derivaciones a izquierda juegan en las álgebras cuasi-Jordan el mismo papel que juegan las anti-derivaciones en las álgebras de Leibniz.

Si usamos el hecho de que el corchete de Lie de una derivación a izquierda y una derivación a derecha es una derivación a izquierda, tenemos el siguiente resultado.

Lema 94 *La transformación lineal $[R_a, L_b]$ es una derivación a izquierda sobre \mathfrak{S}_D , para todo $a, b \in \mathfrak{S}_D$.*

Demostración: Sea $c \in \mathfrak{S}_D$ un elemento arbitrario, entonces de la identidad de Leibniz, los axiomas de diálgebra y la definición de \triangleleft se tiene que

$$\begin{aligned}
[Ad_b, ad_a](c) &= Ad_b(ad_a c) - ad_a(Ad_b c) = Ad_b([c, a]) - ad_a([b, c]) \\
&= [b, [c, a]] - [[b, c], a] = -[[b, a], c] \\
&= -(b \dashv a - a \vdash b) \dashv c + c \vdash (b \dashv a - a \vdash b) \\
&= -(b \dashv a) \dashv c + (a \vdash b) \dashv c + c \vdash (b \dashv a) - c \vdash (a \vdash b) \\
&= -b \dashv (a \dashv c) + a \vdash (b \dashv c) + (c \vdash b) \dashv a - (c \vdash a) \vdash b \\
&\quad - (a \dashv c) \vdash b + (b \dashv c) \dashv a + a \vdash (c \vdash b) - b \dashv (c \vdash a) \\
&= 2(-b \triangleleft (a \dashv c) + (b \dashv c) \triangleleft a - b \triangleleft (c \vdash a) + (c \vdash b) \triangleleft a) \\
&= 4((b \triangleleft c) \triangleleft a - b \triangleleft (a \triangleleft c)) \\
&= 4(R_a(L_b c) - L_b(L_a c)) \\
&= 4(R_a L_b - L_b R_a)(c) \\
&= 4[R_a, L_b](c).
\end{aligned}$$

Como el campo sobre el que esta definida \mathfrak{S}_D es de característica diferente de dos $[Ad_b, ad_a]$ es una derivación a izquierda sobre \mathfrak{S}_D , se sigue que $[R_a, L_b]$ es una derivación a izquierda. ■

Este lema nos muestra que en el caso de álgebras cuasi-Jordan generadas por diálgebras existe el concepto de derivación a izquierda interna.

Si D es un álgebra asociativa, entonces \mathfrak{S}_D es un álgebra de Jordan y por lo tanto $L_a = R_a$, para todo a , es decir que $[L_a, L_b]$ es una derivación interna y coincide con la construcción clásica.

El objetivo ahora es determinar si existen derivaciones internas sobre álgebras cuasi-Jordan generadas por diálgebras. En este caso la respuesta es afirmativa y tenemos el siguiente lema.

Lema 95 *La transformación lineal $[R_a, R_b]$ es una derivación sobre \mathfrak{S}_D , para todo $a, b \in \mathfrak{S}_D$.*

Demostración: Con un procedimiento análogo al de la prueba anterior se muestra que

$$[ad_a, ad_b] = 4[R_a, R_b],$$

lo cual prueba el lema. ■

En este caso el concepto de derivación interna coincide con el concepto de derivación interna sobre álgebras de Jordan.

Los lemas anteriores muestran que sobre el álgebra cuasi-Jordan existe el concepto de diderivación interna, y de acuerdo con esto definimos el conjunto de diderivaciones internas sobre el álgebra cuasi-Jordan por

$$DiDer(\mathfrak{S}_D) := \{([R_a, R_b], [R_c, L_f]) \mid a, b, c, f \in \mathfrak{S}_D\}.$$

Si consideramos el espacio vectorial generado por las derivaciones internas, con el corchete de Leibniz definido en 6 del lema 92, tenemos que el corchete de Leibniz de dos diderivaciones internas es nuevamente una diderivación interna, y por lo tanto tenemos probado el siguiente corolario.

Corolario 96 *$DiDer(\mathfrak{S}_D)$ es una subálgebra del álgebra de Leibniz $DL(\mathfrak{S}_D)$.*

Observación 97 *Si consideramos las álgebras cuasi-Jordan a izquierda, tenemos que el concepto de diderivación interna está formado por las derivaciones, las derivaciones a derecha y los resultados son similares.*

Finalizamos esta sección, y este capítulo, diciendo que no ha sido posible probar que la estructura de diderivación interna que hemos mostrado para el caso de álgebras cuasi-Jordan generadas por diálgebras se tenga para el caso general, más aún no ha sido posible probarlo ni para las álgebras cuasi-Jordan separables.

Probar que la estructura de diderivación interna se tiene para el caso general, permitiría tener suficientes elementos para extender la construcción TKK al caso de las álgebras cuasi-Jordan. Esperamos poder lograr esta construcción en un futuro cercano.

Capítulo 4

El álgebra cuasi-Jordan L_x

En este último capítulo, definiremos los conceptos de elemento ad-nilpotente y Q-Jordan sobre álgebras de Leibniz. Probaremos que es posible adicionar una estructura de álgebra cuasi-Jordan a un elemento Q-Jordan sobre un álgebra de Leibniz (sobre un campo de característica diferente de 2 y 3). Además, probaremos algunas propiedades del álgebra cuasi-Jordan construida y daremos la noción de ideal interno sobre álgebras de Leibniz.

En la primera sección de este capítulo estudiamos elementos ad-nilpotentes y Q-Jordan sobre álgebras de Leibniz, mostramos algunas de sus propiedades y estudiamos el álgebra de Lie asociada a los elementos ad-nilpotentes.

En la siguiente sección construimos a partir de un álgebra de Leibniz y un elemento Q-Jordan un álgebra cuasi-Jordan. Este resultado se sigue de una construcción dada por A. Fernández, E. García and M. Gómez (ver [13]).

En la cuarta sección probaremos algunas propiedades de las álgebras cuasi-Jordan que se construyen a partir de elementos Q-Jordan.

En la última sección de este capítulo mostraremos la relación que existe entre elementos Q-Jordan y los ideales internos en álgebras de Leibniz.

4.1. Elementos ad-nilpotentes y Q-Jordan

En esta sección definiremos el concepto de elemento ad-nilpotente en álgebras de Leibniz y probaremos algunos resultados sobre estos. Adicionalmente, estudiaremos los elementos ad-nilpotentes de orden a lo sumo 3, los llamados elementos Q-Jordan, y probaremos algunas propiedades del operador adjunto definido por un elemento Q-Jordan.

Iniciaremos recordando la definición de operador adjunto sobre álgebras de Leibniz y probando algunas propiedades.

Definición 98 Sea L un álgebra de Leibniz. Para todo $x \in L$, definimos el operador **adjunto** $ad_x : L \rightarrow L$ por $ad_x y = [y, x]$, para todo $y \in L$. Adicionalmente, la identidad de Leibniz implica que ad_x es una derivación sobre L , dado que $ad_x[y, z] = [ad_x y, z] + [y, ad_x z]$, para todo $y, z \in L$.

La siguiente relación entre el operador adjunto y el álgebra de Leibniz de transformaciones lineales será fundamental en el desarrollo de esta sección.

Observación 99 La aplicación $ad : L \rightarrow gl(L)$, $x \mapsto ad_x$, donde $gl(L)$ es el álgebra de Lie de las transformaciones lineales sobre L , con corchete de Lie $[T, S] = TS - ST$, es un antihomomorfismo de álgebras de Leibniz,

$$ad_{[x,y]} = [ad_y, ad_x], \quad \text{para todo } x, y \in L \quad (4.1)$$

El conjunto $ad(L) = \{ad_x | x \in L\}$, con corchete definido por $[ad_x, ad_y] := ad_x ad_y - ad_y ad_x$, es un álgebra de Lie, en particular es una subálgebra de Lie de $gl(L)$.

Para simplificar la escritura, introduciremos la siguiente notación.

Notación 100 Usaremos letras mayúsculas para denotar el operador adjunto (los elementos de $ad(L)$): $X = ad_x$, $Y = ad_y$, etcétera. En esta notación la anterior identidad toma la forma

$$ad_{[x,y]} = [Y, X] \quad (4.2)$$

Definamos ahora el concepto de elemento ad-nilpotente en álgebras de Leibniz.

Definición 101 Sean L un álgebra de Leibniz y x un elemento en L . Diremos que x es un elemento **ad-nilpotente** si existe un entero positivo m tal que $ad_x^m = 0$. Para cualquier elemento ad-nilpotente $x \in L$ definimos el **índice de ad-nilpotencia** de x como el menor entero positivo m tal que $ad_x^m = 0$ y $ad_x^{m-1} \neq 0$.

Los elementos en un álgebra de Leibniz que satisfacen la siguiente definición son los objetos centrales en la construcción de álgebras cuasi-Jordan a partir de álgebras de Leibniz.

Definición 102 Diremos que un elemento x en un álgebra de Leibniz L es un **elemento Q-Jordan** si x es un elemento ad-nilpotente de índice a lo sumo 3.

Demos ahora un ejemplo de elemento de Jordan sobre álgebras de Leibniz.

Ejemplo 103 *Un ejemplo natural de elemento Q-Jordan son los elementos de cuadrado cero en diálgebras. En efecto, si D es una diálgebra y L es el álgebra de Leibniz D_{Leib} , entonces para cualquier $x, y \in L$, tenemos que:*

$$1. \text{ad}_x^2(y) = y \dashv (x \dashv x) - 2(x \vdash y) \dashv x + (x \vdash x) \vdash y$$

$$2. \text{ad}_x^3(y) = y \dashv x_{\vdash}^3 - 3(x \vdash y) \dashv (x \dashv x) + 3(x \vdash x) \vdash (y \dashv x) + x_{\vdash}^3 \dashv y,$$

donde $x_{\vdash}^3 = x \dashv (x \dashv x)$ y $x_{\vdash}^3 = (x \vdash x) \vdash x$.

Por lo tanto, si x es un elemento en D tal que $x \dashv x = 0$ o $x \vdash x = 0$, entonces $\text{ad}_x^3(y) = 0$, ya que $(x \vdash y) \dashv (x \dashv x) = (x \vdash y) \dashv (x \vdash x)$ y $(x \vdash x) \vdash (y \dashv x) = (x \dashv x) \vdash (y \dashv x)$. Lo anterior implica que x es un elemento Q-Jordan en el álgebra de Leibniz D^- . Notemos también que $\text{ad}_x^2(L) = x \vdash L \dashv x$.

Otro ejemplo de elementos Q-Jordan es el siguiente.

Ejemplo 104 *Sea L el álgebra de Leibniz con base $\{a, b, c, d, e\}$ definida por*

$$[a, b] = c \quad [a, c] = -2a \quad [b, a] = -c \quad [b, c] = 2b$$

$$[c, a] = 2a \quad [c, b] = -2b \quad [d, b] = e \quad [d, c] = -d$$

$$[e, a] = d \quad [e, c] = e,$$

donde los productos omitidos son iguales a cero. Los elementos a, b son elementos Q-Jordan en L , L^{ann} es el subespacio generado por $\{d, e\}$ y L_{Lie} es isomórfica al álgebra de Lie sl_2 .

El siguiente ejemplo de álgebra de Leibniz aparece en el trabajo de K. Liu (ver [27]) sobre álgebras de Leibniz simples con factor de Lie sl_2 .

Ejemplo 105 *Sea L el álgebra de Leibniz con base $\{h, e, f, u, v, w\}$, sobre un campo \mathbb{K} (de característica cero), definida por*

$$[h, e] = 2e + 2\alpha u \quad [h, f] = -2f + \beta w \quad [e, h] = -2e \quad [e, f] = h + \alpha v$$

$$[f, h] = 2f \quad [f, e] = -h - \beta v \quad [u, h] = -2u \quad [u, f] = -v$$

$$[v, e] = -2u \quad [v, f] = -w \quad [w, h] = 2w \quad [w, e] = -2v,$$

donde los productos omitidos son iguales a cero y α, β son dos elementos fijos en el campo \mathbb{K} .

Tenemos que e es un elemento Q-Jordan en L , L^{ann} es el subespacio generado por $\{u, v, w\}$ y L_{Lie} es isomorfa a sl_2 .

Ahora, enunciaremos dos resultados sobre elementos ad-nilpotentes en álgebras de Lie, el primero debido a A. I. Kostrikin (ver [3]) y el segundo a G. Benkart y I. M. Isaacs (ver [4]).

Teorema 106 (Kostrikin) Sean \mathfrak{g} un álgebra de Lie y a un elemento no nulo en \mathfrak{g} tal que $ad_a^m = 0$, para $m \geq 4$. Si \mathfrak{g} es libre de n -torsión para todo $n \leq m$, entonces

$$\left(ad_{ad_a^{m-1}(c)}\right)^{m-1} = 0, \quad \text{para todo } c \in \mathfrak{g}.$$

Por lo tanto \mathfrak{g} contiene un elemento ad-nilpotente de índice a lo sumo 3.

Teorema 107 Cualquier álgebra de Lie finito dimensional sobre un campo algebraicamente cerrado de característica arbitraria contiene un elemento no nulo ad-nilpotente y por lo tanto un elemento no nulo de índice a lo sumo 3.

El anterior resultado es trivial en álgebras de Leibniz que no son Lie, ya que $ad_z = 0$, para todo $z \in L^{ann}$, y $L^{ann} \neq \{0\}$.

Teniendo en cuenta la relación que existe entre los elementos ad-nilpotentes y el álgebra de Lie de las transformaciones lineales, tenemos la siguiente conjetura.

Conjetura 108 Conjeturamos que los teoremas de A. I. Kostrikin y de G. Benkart y I. M. Isaacs son válidos en el contexto de las álgebras de Leibniz para elementos no triviales, es decir para los $x \in L$ tales que $x \notin L^{ann}$.

A continuación probaremos algunos resultados técnicos sobre elementos ad-nilpotentes en álgebras de Leibniz.

Lema 109 Sea L un álgebra de Leibniz. Entonces para todo entero positivo n tenemos que

$$AD_X^n(Y) = ad_{X^n(y)}, \quad \text{para todo } x, y \in L, \quad (4.3)$$

donde $AD_X : ad(L) \rightarrow ad(L)$, $Y \mapsto [X, Y]$, para todo $X, Y \in ad(L)$, es el operador adjunto sobre $ad(L)$.

Demostración: Si $n = 1$, de (4.2) se sigue

$$AD_X(Y) = [X, Y] = ad_{[y, x]} = ad_{ad_x(y)} = ad_{X(y)}.$$

Supongamos que la propiedad es válida para $n = k$, es decir

$$AD_X^k(Y) = ad_{X^k(y)}, \quad \text{para todo } x, y \in L.$$

Como $X^{k+1}(y) = X(X^k(y)) = [X^k(y), x]$, entonces

$$\begin{aligned} AD_X^{k+1}(Y) &= AD_X(AD_X^k(Y)) = AD_X(ad_{X^k(y)}) \\ &= [X, ad_{X^k(y)}] = [ad_x, ad_{X^k(y)}] \\ &= ad_{[X^k(y), x]} = ad_{X^{k+1}(y)} \end{aligned}$$

y por lo tanto el resultado es válido para $n = k + 1$. ■

4.2. El álgebra cuasi-Jordan L_x

En esta sección probaremos que es posible construir un álgebra cuasi-Jordan a partir de un elemento Q-Jordan sobre un álgebra de Leibniz L en un campo \mathbb{K} que contiene el término $1/6$ (\mathbb{K} contiene los elementos $1/2$ y $1/3$).

Esta construcción traslada el resultado obtenido por A. Fernández, E. García y M. Gómez (ver [13] Teorema 2.4) al contexto de las álgebras de Leibniz y las álgebras cuasi-Jordan.

Siguiendo las ideas del lema 2.3 en [13], tenemos el siguiente resultado para elementos ad-nilpotentes de índice a lo sumo 3 en álgebras de Leibniz.

Lema 110 *Sea x un elemento ad-nilpotente de índice a lo sumo 3 en un álgebra de Leibniz L . Para cualquier $a, b \in L$ y $\alpha \in K$, tenemos que*

1. $X^2AX = XAX^2$
2. $X^2AX^2 = 0$
3. $X^2A^2XAX^2 = X^2AXA^2X^2$
4. $[X^2(a), X(b)] = -[X(a), X^2(b)]$
5. $ad_x^2([a, [b, x]]) = [X(a), X^2(b)]$
6. $X^2ad_{[a, X^2(b)]} = ad_{[X^2(a), b]}X^2$
7. $ad_{X^2(a)}ad_{X^2(b)} = X^2ABX^2$.
8. $\alpha x, ad_x^2(a)$ son elementos Q-Jordan en L ,

donde $A = ad_a$ y $B = ad_b$.

Demostración:

1. Dado que $X^3(a) = 0$, entonces $ad_{X^3(a)} = 0$. De (4.3), tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= ad_{X^3(a)} = AD_X^3(A) \\ &= [X, [X, [X, A]]] \\ &= X^3A - 3X^2AX + 3XAX^2 - AX^3 \\ &= 3(XAX^2 - X^2AX), \end{aligned}$$

lo cual prueba 1, ya que L es libre de 3-torsión.

2. De 1 se sigue que $X^2AX = XAX^2$. Si multiplicamos al lado derecho por X en ambos términos de la ecuación anterior, obtenemos 2.
3. Usando 2 vemos que

$$\begin{aligned} 0 &= X^2([[[X, A], A], A])X^2 \\ &= X^2(XA^3 - 3AXA^2 + 3A^2XA - A^3X)X^2 \\ &= 3(X^2A^2XAX^2 - X^2AXA^2X^2) \end{aligned}$$

4. Como $X^3 = 0$, usando la identidad de Leibniz se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= X^3([a, b]) = [[[[a, b], x], x], x] \\ &= [[[[a, x], b], x], x] + [[a, [b, x]], x], x] \\ &= [[[[a, x], x], b], x] + 2[[[a, x], [b, x]], x] + [[a, [[b, x], x]], x] \end{aligned}$$

La identidad de Leibniz implica que

$$\begin{aligned} 0 &= 3([[a, x], x], [b, x]) + [[a, x], [[b, x], x]] \\ &= 3([X^2(a), X(b)] + [X(a), X^2(b)]). \end{aligned}$$

Por lo tanto $[X^2(a), X(b)] = -[X(a), X^2(b)]$, ya que L es libre de 3-torsión.

5. De la identidad de Leibniz y 4, tenemos que

$$\begin{aligned} ad_x^2([a, [b, x]]) &= [[a, [b, x]], x], x] \\ &= [[a, x], [b, x]], x] + [[a, [[b, x], x]], x] \\ &= [[a, x], x], [b, x]] + 2[[a, x], [[b, x], x]] \end{aligned}$$

y usando la definición de X obtenemos

$$\begin{aligned} ad_x^2([a, [b, x]]) &= [X^2(a), X(b)] + 2[X(a), X^2(b)] \\ &= -[X(a), X^2(b)] + 2[X(a), X^2(b)] \\ &= [X(a), X^2(b)]. \end{aligned}$$

6. Dado que $ad_{[a, X^2(b)]} = [[X, [X, B]], A]$, vemos que

$$\begin{aligned} X^2 ad_{[a, X^2(b)]} &= X^2 ((X^2 B - 2XBX + BX^2)A - A(X^2 B - 2XBX + BX^2)) \\ &= 2X^2 AXBX - X^2 ABX^2 \\ &= 2XAXBX^2 - X^2 ABX^2 \\ &= [B, [X, [X, A]]]X^2 \\ &= ad_{[X^2(a), b]}X^2. \end{aligned}$$

7. De (4.3) y 2, tenemos que

$$\begin{aligned} ad_{X^2(a)} ad_{X^2(b)} &= [X, [X, A]][X, [X, B]] \\ &= (X^2 A - 2XAX + AX^2)(X^2 B - 2XBX + BX^2) \\ &= -2X^2 AXBX + X^2 ABX^2 + 4XAX^2 BX - 2XAXBX^2 \\ &= X^2 ABX^2 \end{aligned}$$

8. $ad_{\alpha x}^3 = \alpha^3 ad_x^3$ prueba que αx es un elemento Q-Jordan. Usando 2 y 7 se sigue que

$$\begin{aligned} ad_{X^2(a)}^3 &= ad_{X^2(a)} ad_{X^2(a)}^2 = [X, [X, A]]X^2 A^2 X^2 \\ &= (X^2 A - 2XAX + AX^2)X^2 A^2 X^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

o sea que $ad_x^2(a)$ es un elemento Q-Jordan.

■

En el siguiente resultado, a partir de un elemento Q-Jordan, introduciremos un nuevo producto sobre las álgebras de Leibniz y el conjunto $Ker_L(x)$, los cuales nos permitirán construir un álgebra cuasi-Jordan.

Teorema 111 Sean L un álgebra de Leibniz y x un elemento Q-Jordan en L . Si sobre L definimos el producto

$$a \triangleleft b := \frac{1}{2}[a, [b, x]],$$

entonces (L, \triangleleft) es un álgebra no asociativa que denotaremos por $L^{(x)}$. Además, el subconjunto de L definido por

$$Ker_L(x) := \{a \in L \mid X^2(a) = 0\}$$

es un ideal de $L^{(x)}$.

Demostración: Sean $a \in Ker_L(x)$ y $b \in L$. Usando 4 y 5 del lema anterior, vemos que

$$\begin{aligned} X^2([b, [a, x]]) &= [X(b), X^2(a)] = 0 \\ X^2([a, [b, x]]) &= [X(a), X^2(b)] = -[X^2(a), X(b)] = 0, \end{aligned}$$

dado que $X^2(a) = 0$. Por lo tanto $a \triangleleft b$ y $b \triangleleft a$ están en $Ker_L(x)$. ■

Ahora veremos que es posible construir un álgebra cuasi-Jordan L_x , a partir de un elemento Q-Jordan x en un álgebra de Leibniz L . Este resultado coincide con el teorema 2.4 en [13] para álgebras de Lie.

Teorema 112 *Sean L un álgebra de Leibniz y x un elemento Q-Jordan L . Entonces $L_x := L^{(x)}/Ker_L(x)$ es un álgebra cuasi-Jordan.*

Demostración: Sean $a, b \in L$ y \bar{a} denota la clase de a con respecto a $Ker_L(x)$. De la definición de \triangleleft tenemos que

$$c \triangleleft (b \triangleleft a) = \frac{1}{4}[c, [[b, [a, x]], x]] \quad \text{y} \quad c \triangleleft (a \triangleleft b) = \frac{1}{4}[c, [[a, [b, x]], x]].$$

Como

$$\begin{aligned} ad_x^2([c, [[b, [a, x]], x]]) &= [X(c), X^2([b, [a, x]])] \\ &= [X(c), X^2([b, a], x) - [[b, x], a)] \\ &= [X(c), X^2(-[[b, x], a])], \end{aligned}$$

de 4 en el lema 110 obtenemos

$$\begin{aligned} ad_x^2([c, [[b, [a, x]], x]]) &= -[X^2(c), X(-[[b, x], a])] \\ &= -[X^2(c), [-[[b, x], a], x]] \\ &= -[X^2(c), [[a, [b, x]], x]] \\ &= -[X^2(c), X([a, [b, x]])]. \end{aligned}$$

Usando nuevamente 4 del lema 110 llegamos a que

$$\begin{aligned} ad_x^2([c, [[b, [a, x]], x]]) &= [X(c), X^2([a, [b, x]])] \\ &= ad_x^2([c, [[a, [b, x]], x]]). \end{aligned}$$

Por lo tanto $c \triangleleft (b \triangleleft a) - c \triangleleft (a \triangleleft b) \in Ker_L(x)$, o lo que es lo mismo $\bar{c} \triangleleft (\bar{a} \triangleleft \bar{b}) = \bar{c} \triangleleft (\bar{b} \triangleleft \bar{a})$.

Probemos ahora la identidad de Jordan. Sean $a, b \in L$ y tomemos $w := [[a, [a, x]], x]$. Entonces

$$8(\bar{b} \triangleleft \bar{a}^2) \triangleleft \bar{a} = \overline{[[b, [[a, [a, x]], x]], [a, x]} = \overline{[[b, w], [a, x]]}$$

y

$$\begin{aligned} 8(\bar{b} \triangleleft \bar{a}) \triangleleft \bar{a}^2 &= \overline{[[b, [a, x]], [[a, [a, x]], x]} = \overline{[[b, [a, x]], w]} \\ &= \overline{[[b, w], [a, x]]} + \overline{[b, [[a, x], w]]} \\ &= 8(\bar{b} \triangleleft \bar{a}^2) \triangleleft \bar{a} + \overline{[b, [[a, x], w]]}. \end{aligned}$$

Por lo tanto solamente necesitamos verificar que $[b, [[a, x], w]]$ está en $\text{Ker}_L(x)$. En efecto, como $[b, [[a, x], w]] = ad_{[[a, x], w]}(b)$ luego

$$\begin{aligned} ad_x^2 ad_{[[a, x], w]} &= X^2[W, [X, A]] \\ &= X^2WXA - X^2WAX + X^2AXW, \end{aligned}$$

ya que $X^3 = 0$, y

$$ad_w = W = X^2A^2 - 2XAXA + 2AXAX - A^2X^2.$$

De

$$\begin{aligned} X^2WAX &= 0 \\ -X^2WAX &= -2X^2AXAXAX + X^2A^2X^2AX \\ X^2AXW &= 2X^2AXAXAX - X^2AXA^2X^2, \end{aligned}$$

tenemos que $ad_x^2 ad_{[[a, x], w]} = 0$, es decir $X^2([b, [[a, x], w]]) = 0$, para todo $a, b \in L$. ■

En el ejemplo 105 tenemos que $\text{Ker}_L(e)$ esta generado por $\{h, e, v, w\}$ y $\bar{u} \triangleleft \bar{f} = \bar{f}$ y $\bar{f} \triangleleft \bar{u} = \bar{0}$, entonces L_e no es conmutativa. Por lo tanto L_x es un álgebra no conmutativa en general.

Observación 113 Sean L un álgebra de Leibniz y x un elemento Q -Jordan en L . Entonces L_x es un álgebra de Jordan si y sólo si $[a, [b, x]] - [b, [a, x]] \in \text{Ker}_L(x)$, para todo $a, b \in L$. En particular, si L es un álgebra de Lie se tiene que L_x es un álgebra de Jordan.

Definición 114 Para cualquier elemento Q -Jordan x en un álgebra de Leibniz L , el álgebra cuasi-Jordan L_x que introducimos en el anterior teorema la llamaremos el **álgebra cuasi-Jordan de L en x** .

Observemos que para el álgebra cuasi-Jordan de L en x , tenemos que $L_x^{ann} \subseteq \overline{L^{ann}}$ y $\overline{Z^r(L)} \subseteq Z^r(L_x)$, ya que

$$\begin{aligned} \bar{a} \triangleleft \bar{b} &= \overline{[a, [b, x]] - [b, [a, x]]} = \overline{[a, [b, x]] - [[b, a], x] + [[b, x], a]} \\ &= \overline{[a, [b, x]] + [[b, x], a]} \in L^{ann} \end{aligned}$$

y

$$[a, [b, x]] = [a, -[x, b]] = 0, \quad \text{para todo } b \in Z^r(L).$$

Por lo tanto, si $L^{ann} \subseteq \text{Ker}_L(x)$ entonces L_x es un álgebra de Jordan.

4.3. Algunas propiedades del álgebra L_x

En esta sección probaremos algunas propiedades del álgebra L_x . En particular daremos condiciones para determinar cuándo el álgebra cuasi-Jordan de L en x tiene unidades a derecha.

Comenzaremos generalizando el concepto de álgebra de Lie no degenerada al caso de álgebras de Leibniz. Primero recordemos que un álgebra de Lie es no degenerada si no contiene divisores absolutos de cero, o sea elementos no nulos a tales que $ad_a^2 = 0$. Es decir, que si \mathcal{G} es un álgebra de Lie no degenerada y $ad_a^2 = 0$, para algún $a \in \mathcal{G}$, entonces $a = 0$.

Ahora, si L es un álgebra de Leibniz se tiene que $[a, b] = 0$, para todo $a \in L$ y $b \in L^{ann}$, lo cual implica que las álgebras de Leibniz no pueden ser no degeneradas en el sentido de las álgebras de Lie, ya que todos los elementos de L^{ann} son divisores absolutos de cero en L . De acuerdo con esto introduciremos la siguiente definición.

Definición 115 *Un elemento x en un álgebra de Leibniz L se dice que es un **divisor absoluto de cero en L** si $ad_x^2 = 0$. Un álgebra de Leibniz L se dice que es **no degenerada** si los divisores absolutos de cero en L son elementos de L^{ann} , es decir que si $ad_x^2 = 0$, para $x \in L$, entonces $x \in L^{ann}$.*

Dado que $L^{ann} = \{0\}$, si L es un álgebra de Lie, entonces la anterior definición coincide con la definición de álgebra de Lie no degenerada en este caso.

Adicionalmente, si L es un álgebra de Leibniz no degenerada entonces $L^{ann} = Z^r(L)$, ya que $ad_z = 0$ para todo $z \in Z^r(L)$.

Caracterizaremos a continuación la existencia de unidades a derecha sobre el álgebra L_x . En particular, probaremos que si $[[y, x], x] - 2x \in L^{ann}$ entonces existen unidades a derecha en L_x .

Lema 116 *Sean L un álgebra de Leibniz y x un elemento Q -Jordan en L . Si existe un y en L tal que $[[y, x], x] - 2x \in L^{ann}$, entonces \bar{y} es una unidad a derecha en L_x . Más aún, $\bar{z} + \bar{y}$ es una unidad a derecha en L_x , para todo $z \in Z^r(L)$.*

Demostración: Para todo $a \in L$, tenemos que

$$\begin{aligned} X^2([a, [y, x]]) &= [X(a), X^2(y)] \\ &= [[a, x], [[y, x], x]] = 2[[a, x], x] = 2X^2(a), \end{aligned}$$

ya que $0 = [b, X^2(y) - 2x] = [b, X^2(y)] - [b, 2x]$, para todo $b \in L$. Por lo tanto $X^2([a, [y, x]] - 2a) = 0$ y esto es equivalente a que $\bar{a} \triangleleft \bar{y} = \bar{a}$, para todo $\bar{a} \in L_x$.

Las identidades $[a, z] = 0$, para todo $z \in Z^r(L)$, y $[a, [b, c]] = [a, -[c, b]]$, para todo $a, b, c \in L$, implican que $\bar{z} + \bar{y}$ es una unidad a derecha en L_x , para todo $z \in Z^r(L)$.

■

El lema anterior muestra que si \bar{y} es una unidad a derecha en L_x entonces $y \notin Z^r(L)$.

Ahora mostraremos que la existencia de una unidad a derecha es equivalente a que $[[y, x], x] - 2x \in L^{ann}$, para algún $y \in L$ y para x un elemento Q-Jordan en un álgebra de Leibniz no degenerada L .

Lema 117 Sean L un álgebra de Leibniz no degenerada y x un elemento Q-Jordan de L . Entonces \bar{y} es una unidad a derecha en el álgebra cuasi-Jordan L_x si y sólo si $[[y, x], x] - 2x \in L^{ann}$.

Demostración: Supongamos que existe $y \in L$ tal que $[[y, x], x] - 2x \in L^{ann}$, entonces \bar{y} es una unidad a derecha de L_x por el lema anterior.

Supongamos ahora que \bar{y} es una unidad a derecha en L_x . Tomemos $z := X^2(y) - 2x$. Luego para todo $a \in L$,

$$\begin{aligned} [[a, z], z] &= [[a, X^2(y)], X^2(y)] - 2[[a, x], X^2(y)] - 2X^2([a, [y, x]] - 2a) \\ &= [[a, X^2(y)] - 2[a, x], X^2(y)] \\ &= [[a, X^2(y) - 2x], X^2(y)] \\ &= [[a, z], z] + 2[[a, z], x], \end{aligned}$$

Entonces $[[a, z], x] = 0$, para todo $a \in L$, ya que L es libre de 2-torsión. Como $[z, x] = -2[x, x]$, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= [[a, z], x] = [[a, x], z] + [a, [z, x]] \\ &= [[a, x], z] - 2[a, [x, x]] \\ &= [[a, x], z] \end{aligned}$$

Finalmente, la identidad de Leibniz y las identidades $[[a, z], x] = 0 = [[a, x], z]$ implican que

$$\begin{aligned} [[a, z], z] &= [[a, X^2(y)], z] - 2[[a, x], z] \\ &= [[a, [[y, x], x], z] \\ &= [[[a, [y, x]], x], z] - [[[a, x], [y, x]], z] \\ &= -[[[a, x], z], [y, x]] - [[a, x], [[y, x], z]] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $z \in L^{ann}$, por ser L no degenerada. ■

Observación 118 *El lema anterior prueba que si existe una unidad a derecha \bar{y} en L_x , entonces $\overline{Z^r(L)} \subset L_x^{ann}$ y $\overline{Z^r(L)} + \bar{y} \subset U_r(L_x)$.*

Vamos ahora a definir un tipo de operador especial sobre las álgebras cuasi-Jordan. Este operador coincide con el U -operador (la representación cuadrática) sobre álgebras de Jordan (ver 1.8, sección 1.4).

Definición 119 *Sean \mathfrak{S} un álgebra cuasi-Jordan y R_a el operador de multiplicación a derecha por a sobre \mathfrak{S} ($R_a : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$, $b \mapsto b \triangleleft a$). Para todo $a \in \mathfrak{S}$, definimos el U -operador $U_a : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ por*

$$U_a = 2R_a^2 - R_{a^2}, \quad \text{donde } a^2 = a \triangleleft a. \quad (4.4)$$

Caracterizaremos a continuación la forma que tiene el U -operador sobre L_x . Este resultado es el lema 2.4 en [13], para álgebras de Jordan.

Lema 120 *Sea x un elemento Q -Jordan en un álgebra de Leibniz L . Entonces el álgebra cuasi-Jordan L_x de L en x tiene un U -operador dado por*

$$U_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{1}{4}\overline{A^2X^2(b)}, \quad \text{para todo } \bar{a}, \bar{b} \in L_x \quad (4.5)$$

Demostración: Para todo $c \in L$ se tiene que $[c, x] \in \text{Ker}_L(x)$, dado que $X^2([c, x]) = X^3(c) = 0$. Entonces $\overline{[c, x]} = \bar{0}$ y

$$\begin{aligned} \overline{A^2X^2(b)} &= \overline{[[[[b, x], x], a], a]} \\ &= \overline{[[[[b, x], a], x], a]} + \overline{[[[b, x], [x, a]], a]} \\ &= \overline{[[[[b, x], a], a], x]} + 2\overline{[[[b, x], a], [x, a]]} + \overline{[[b, x], [[x, a], a]]} \\ &= 2\overline{[[[b, a], x], [x, a]]} + 2\overline{[[b, [x, a]], [x, a]]} + \overline{[[b, [[x, a], a]], x]} \\ &\quad + \overline{[[b, [x, [[x, a], a]]]} \\ &= 2\overline{[[[b, a], x], [x, a]]} + 2\overline{[[b, [a, x]], [a, x]]} - \overline{[[b, [[a, [a, x]], x]]} \\ &= 4(2(\bar{b} \triangleleft \bar{a})\bar{a} - \bar{b} \triangleleft \bar{a}^2) \\ &= 4U_{\bar{a}}\bar{b}, \end{aligned}$$

ya que $\overline{[[[b, a], x], [x, a]]} = \bar{0}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} X^2([X([b, a]), [x, a]]) &= -X^2([X([b, a]), [a, x]]) \\ &= -[X(X([b, a]), X^2(a))] \\ &= [X^2(X([b, a]), X(a))] \\ &= [X^3([b, a]), X(a)] \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $b, a \in L$. ■

Sea \mathfrak{S} un álgebra cuasi-Jordan. Como $\mathfrak{S} \triangleleft \mathfrak{S}^{ann} = 0$, las álgebras cuasi-Jordan no pueden ser no degeneradas en el sentido clásico de las álgebras de Jordan, porque todos los elementos en \mathfrak{S}^{ann} son divisores de cero absolutos de \mathfrak{S} (es decir que $U_a = 0$, para todo $a \in \mathfrak{S}$). Por lo tanto daremos la siguiente generalización de la definición de álgebra de Jordan no degenerada (ver [15], página 155).

Definición 121 *Sea \mathfrak{S} un álgebra cuasi-Jordan. Un elemento a en \mathfrak{S} se dice que es un **divisor absoluto de cero** de \mathfrak{S} si $U_a = 0$. Un álgebra cuasi-Jordan \mathfrak{S} se dice que es **no degenerada** si los únicos divisores de cero de \mathfrak{S} son los elementos de \mathfrak{S}^{ann} , es decir que si $U_a = 0$, para $a \in \mathfrak{S}$, entonces $a \in \mathfrak{S}^{ann}$.*

Es claro que la anterior definición coincide con la definición de álgebra de Jordan no degenerada, ya que $\mathfrak{S}^{ann} = \{0\}$ en este caso.

Si \mathfrak{S} es un álgebra cuasi-Jordan no degenerada, se tiene que $\mathfrak{S}^{ann} = Z^r(\mathfrak{S})$, porque $U_z = 0$, para todo $z \in Z^r(\mathfrak{S})$.

Lema 122 *Sean L un álgebra de Leibniz no degenerada y x un elemento Q-Jordan de L . Si $\bar{a} \in L_x$ es un divisor absoluto de cero de L_x entonces $\bar{a} \in Z^r(L_x)$.*

Demostración: Sea \bar{a} un divisor absoluto de cero en $Jor(L_x)$. Entonces $U_{\bar{a}}\bar{b} = \bar{0}$ para todo $\bar{b} \in L_x$. Por 7 en el lema 110, tenemos que $0 = ad_x^2 ad_{\bar{a}}^2 ad_x^2(b) = X^2 A^2 X^2(b) = ad_{X^2(a)}^2(b)$ y por lo tanto $(ad_x^2(a))_L \in L^{ann}$, ya que L es no degenerada.

Por 5 en 110, $X^2([b, [a, x]]) = [X^2(b), X^2(a)] = 0$, para cualquier $b \in L$. Por lo tanto $\bar{b} \triangleleft \bar{a} = \bar{0}$, para todo $b \in L$, y esto implica que $\bar{a} \in Z^r(L_x)$. ■

4.4. Ideales internos en álgebras de Leibniz

En esta sección caracterizaremos los elementos Q-Jordan en álgebras de Leibniz por medio de ideales internos. Además probaremos algunas propiedades de los ideales internos y su relación con elementos regulares.

Primero introduzcamos la noción de ideal interno en álgebras de Leibniz.

Definición 123 *Sea L un álgebra de Leibniz. Un subespacio vectorial B de L es un **ideal interno** si $[[L, B], B] \subseteq B$. Claramente, cualquier ideal I de L es un ideal interno. Más aún, subideales de L son también ideales internos.*

*Un **ideal interno abeliano** es un ideal interno B el cual es también una subálgebra abeliana, es decir que $[B, B] = 0$.*

De acuerdo con la última definición, tenemos la siguiente caracterización para los elementos Q-Jordan en álgebras de Leibniz.

Lema 124 Sean L un álgebra de Leibniz y $x \in L$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $ad_x^3 = 0$, con $x \notin L^{ann}$
2. $x \in B$, para B un ideal interno abeliano tal que $B \not\subseteq L^{ann}$.

Demostración: Supongamos que $ad_x^3 = 0$ ($X^3(L) = 0$) y $x \notin L^{ann}$. Primero, vamos a probar que $X^2(L)$ es un ideal interno abeliano de L . Basta probar que $YZ(L) \subseteq X^2(L)$, para $Y = ad_y$ y $Z = ad_z$, donde $y = X^2(v)$ y $z = X^2(w)$. Esta ecuación es 7 en 110. Esto implica que $YZ(L) \subseteq X^2(L)$.

De otro lado, como

$$[y, z] = Z(y) = (X^2W - 2XWX + WX^2)(X^2(v)) = 0$$

entonces $X^2(L)$ es un ideal interno abeliano de L . Por lo tanto $Fx + X^2(L)$ es un ideal interno abeliano de L , donde F es el campo sobre el que está definido L . Como $ad_x \neq 0$, se tiene que $x \notin L^{ann}$.

Ahora, supongamos que $x \in B$, para B un ideal interno abeliano de L tal que $B \not\subseteq L^{ann}$. Entonces para $x \in B$ tal que $x \notin L^{ann}$, vemos que $ad_x^3(L) = [[[L, x], x], x] \subseteq [B, x] = 0$. ■

Sea L un álgebra de Leibniz. Un elemento no nulo $x \in L$ se denomina *regular de von Neumann* si $X^3 = 0$ y $x \in X^2(L)$. Esto es claro si $x \in L$ es von Neumann regular, entonces $x \notin Z^r(L)$ y x es un elemento Q-Jordan.

El siguiente lema, es el lema 2.7 en [13] para álgebras de Leibniz, con la misma prueba.

Lema 125 Sea x un elemento Q-Jordan de L .

1. Si I es un ideal de L y $x \in I$ es regular de von Neumann, entonces ambas álgebras cuasi-Jordan I_x y L_x coinciden.
2. Si $L = I \oplus J$ es una suma directa de ideales y $x = i + j$ con respecto a esta descomposición, entonces $L_x \cong I_i \times J_j$.
3. Para todo ideal B de L , $B_x := (B/Ker_L(x) \cap B, \triangleleft)$ es una subálgebra de L_x .

Capítulo 5

Conclusiones

Para comenzar, recordemos que el objetivo central sobre el cual se desarrollo esta tesis es: *encontrar una estructura algebraica que generalizara las álgebras de Jordan y que tuviera relaciones con las álgebras de Leibniz similares a las existentes entre álgebras de Jordan y de Lie.*

En este sentido, los trabajos clásicos fundamentales a extender al caso de álgebras de Leibniz eran la construcción TTK de M. Koecher (ver [21] y [23]) y los trabajos de A. Fernández López, E. García y M. Gómez Lozano (ver [13]).

Recordemos que aunque la teoría de las algebras de Leibniz y la diálgebras se ha desarrollado fuertemente en el área de las teorías de homología y cohomología, en sus aspectos algebraicos existe mucha teoría por desarrollar. Cabe anotar en este sentido que alguno de los conceptos clásicos de álgebras de Lie se han extendido recientemente al contexto de las álgebras de Leibniz, tal es el caso de la noción de subálgebra de Cartan.

De otro lado, es importante decir que en el momento en que estábamos en la redacción final de esta tesis y ya teníamos aprobado para publicación nuestro artículo *quasi-Jordan algebras* (ver [36]), encontramos el preprint de K. Liu, *Generalizations of Jordan Algebras and Malcev Algebras* (<http://arxiv.org/abs/math/0606628>), quien ha venido trabajando en la misma dirección nuestra.

De otro lado, a partir de la presentación de nuestro trabajo en el XVII coloquio Latinoamericano de álgebra, celebrado entre el 23 y el 27 de julio de este año en Medellín, Colombia, el profesor Iván Shestakov de la Universidad de Sao Paulo, Brasil, nos puso en contacto con el profesor Pavel Kolesnikov, quien recientemente puso en la Web el preprint *varieties of dialgebras and conformal algebras* (<http://arxiv.org/abs/math/0611501v3>) en el cual construye álgebras a partir de diálgebras, en particular álgebras de tipo Jordan.

En este sentido debemos decir que en ambos trabajos se generalizan las álgebras de

Jordan. En el trabajo de K. Liu se introducen las llamadas *Generalized Jordan algebras* y en el de P. Kolesnikov se introducen las *Jordan-like algebras*. Ambas definiciones son menos generales que nuestra definición de álgebra cuasi-Jordan.

En particular, en el caso de las generalized Jordan algebras de K. Liu se consideran tres axiomas, de los cuales los dos primeros coinciden con los que nosotros proponemos. El tercer axioma que propone K. Liu no lo consideramos en nuestra definición, pero si lo estudiamos en esta tesis (ver la identidad (QJ4) en la sección 3.2). Además, debemos anotar que en el trabajo de K. Liu solo se presentan dos resultados, que no tienen relación con nuestro trabajo, y se caracteriza el ideal anulador y el conjunto de unidades a derecha, la cual coincide con nuestra caracterización.

De otro lado, para el caso de las Jordan-like algebras, P. Kolesnikov propone como axiomas tres identidades lineales en cada una de las variables, de las cuales la primera coincide exactamente con nuestra conmutatividad a izquierda y de las otras dos, una es equivalente a la identidad de Jordan a izquierda si el campo base tiene característica diferente de 2 y 3. El axioma restante no tiene relación con nuestro trabajo.

Lo anterior nos indica que el estudio de nuevas generalizaciones de álgebras clásicas usando las diálgebras es un área de investigación en surgimiento.

De acuerdo con los objetivos planteados, el hecho de que la propuesta de una nueva estructura de tipo Jordan tiene fundamentos teóricos y que están surgiendo nuevos trabajos en este sentido, los principales aportes de esta tesis son los siguientes:

En el capítulo dos, la caracterización del halo de una diálgebra, el estudio del concepto de elemento regular a través del ideal anulador D^{ann} e introducir el concepto de diálgebra separable, el cual no había sido considerado antes. El concepto de diálgebra separable no permitió resolver parcialmente el problema de adicionar unidades barra en diálgebras.

En el tercer capítulo, los principales logros fueron encontrar la generalización de las álgebras de Jordan, las **álgebras cuasi-Jordan**, que constituyen el núcleo central de esta tesis. A partir de esta definición, poder compararlas con las álgebras de Jordan y su principal generalización hasta hoy, las álgebras de Jordan no conmutativas. Luego, poder caracterizar los ideales \mathfrak{S}^{ann} y $Z^r(\mathfrak{S})$, y el conjunto de unidades a derecha. A partir de esto, introducimos la noción de álgebra cuasi-Jordan separable y caracterizamos todas las álgebras cuasi-Jordan por medio de estas álgebras. Con este resultado adicionamos unidades a derecha sobre álgebras cuasi-Jordan separables, lo que nos permitió concluir que el estudio de las álgebras cuasi-Jordan se debe basar en las álgebras cuasi-Jordan separables unitales.

Finalmente en este capítulo, introducimos las definiciones de elemento invertible y representación cuadrática generalizada en álgebras cuasi-Jordan, estudiamos derivaciones a izquierda y a derecha sobre álgebras, a partir de las cuales construimos

álgebras de Leibniz de diderivaciones, para finalmente encontrar diderivaciones internas sobre álgebras cuasi-Jordan generadas por diálgebras.

En el cuarto capítulo, está contenido el principal indicio de que la estructura propuesta de álgebra cuasi-Jordan debe ser el análogo de las álgebras de Jordan dentro del contexto de las álgebras de Leibniz y las diálgebras, y el cual constituye el resultado central de este capítulo: *A toda álgebra de Leibniz con elemento Q-Jordan se le puede asociar un álgebra cuasi-Jordan, la cual en general no es de Jordan.*

Junto con este resultado, otros resultados relevantes de este capítulo son: la definición de elemento Q-Jordan sobre álgebras de Leibniz, la construcción del álgebra L_x , el ejemplo de que existen álgebras cuasi-Jordan generadas por elementos Q-Jordan que no son conmutativas, la extensión de los conceptos de álgebras de Leibniz y de Jordan no degeneradas, la caracterización de las unidades a derecha en L_x y de los elementos Q-Jordan vía la noción de ideal interno.

Ya que tenemos claros los aportes logrados en esta tesis, a continuación presentaremos una lista de problemas que tenemos enfocados, y en algunos de los cuales ya estamos trabajando.

1. Definir los conceptos de semisimplicidad, no degenerancia, primitividad, semi-primitividad, etcétera, sobre álgebras cuasi-Jordan y de Leibniz, para poder describir las álgebras cuasi-Jordan.
2. Construir un álgebra de Leibniz del tipo TKK para las álgebras cuasi-Jordan separables. Para luego hacer la construcción en el caso general.
3. Para álgebras de Leibniz separables estudiar los elementos de Jordan y construir el álgebra cuasi-Jordan en el elemento de Jordan. Ver si el álgebra L_x es un álgebra cuasi-Jordan separable.
4. Encontrar propiedades que se transfieren entre el álgebra de Leibniz L y el álgebra cuasi-Jordan L_x generada por un elemento Q-Jordan x .
5. Generalizar el concepto de sistemas triples de Jordan al contexto de las álgebras cuasi-Jordan y las álgebras de Leibniz, iniciando con un producto triple generado por diálgebras.
6. Relacionar el concepto de di-grupos lineales con álgebras cuasi-Jordan, tal como se hace en el caso clásico con grupo lineales y álgebras de Jordan.
7. Desarrollar la teoría de representaciones para álgebras cuasi-Jordan.
8. Encontrar una posible relación entre las álgebras cuasi-Jordan y varias variables complejas (Kernels de reproducción).

9. Construir una teoría de categorías relacionada con álgebras que contienen un ideal anulador (álgebras con divisores de cero no triviales que formen un ideal).

Bibliografía

- [1] A. A. Albert, *On a certain algebra of quantum mechanical*, Ann. of Math. **35** (1934), 65-73.
- [2] S. Albeverio, Sh. A. Ayupov, B. A. Omirov, *Cartan subalgebras and criterion of solvability of finite dimensional Leibniz algebras*, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, preprint, 2004.
- [3] G. Benkart, *On inner ideals and ad-nilpotent elements on Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **232** (1977), 61-81.
- [4] G. Benkart, I. M. Isaacs, *On the existence of ad-nilpotent elements*, Proc. Amer. Math. Soc. **63** (1977), 39-40.
- [5] A. Bloch, *On a generalization of Lie algebra notion*, Math. in URSS Doklady **165** 3 (1965), 471-173.
- [6] M. R. Bremner, L. I. Murakami, I. P. Shestakov, *Nonassociative algebras*, to appear in CRC handbook of linear algebra.
- [7] F. Chapoton, *Un endofoncteur de la catégorie des opérades*, in: Dialgebras and related operads, Lectures Notes in Mathematics, vol. 1763, Springer Verlag, 2001, pp. 105-110.
- [8] A. Frabetti, *Dialgebra (co)homology with coefficient*, in: Dialgebras and related operads, Lectures Notes in Mathematics, vol. 1763, Springer Verlag, 2001, pp. 66-103.
- [9] R. Felipe, *Digroups and their linear representations*, East-West journal of mathematics, **7** (2005), no 1.
- [10] R. Felipe, *An analogue to functional analysis in dialgebras*, Intern. Math. Forum, **2** (2007), no. 22, pp. 1069-1091.

- [11] R. Felipe, N. López and F. Ongay, *R-Matrices for Leibniz algebras*, Letters in Mathematical Physics **63** (2003), no 2, pp. 157-164.
- [12] R. Felipe, N. López-Reyes, F. Ongay, R. Velásquez, *Yang-Baxter equations on matrix dialgebras with a bar unit*, Linear Alg. and its Appl., **403** (2005), 31-44.
- [13] A. Fernández López, E. García, M. Gómez Lozano, *The Jordan algebras of a Lie algebra*, J. Algebra 308, 2007, 164-177.
- [14] A. Fernández López, E. García, M. Gómez Lozano and E. Neher, *A construction of gradings in Lie algebras*, (preprint).
- [15] N. Jacobson, *Structure and representations of Jordan algebras*, Amer. Math. Soc. Vol. 39 (1968).
- [16] P. Jordan, J. von Neumann and E. Wigner, *On an algebraic generalization of the quantum mechanical*, Ann. of Math. **35** (1934), 29-46.
- [17] I. L. Kantor, *Classification of irreducible transitive differential groups*, Dokl. Akad. Nauk SSR, Vol. 158, No. 6, 1271-1274 (1964).
- [18] M. Kinyon, *The coquecigrue of a Leibniz algebra*, presented at *AlanFest*, a conference in honor of the 60th birthday of Alan Weinstein, Erwin Schrödinger Institute, Viena, Austria, 4 august 2004, w3.impa.br/ jair/alanposter/coquecigrue.pdf
- [19] M. Kinyon, *Leibniz algebras, Lie racks and digroups*, arXiv:math/0403509v5 (preprint).
- [20] M. K. Kinyon, A. Weinstein, *Leibniz algebras, Courant algebroids and multiplications on reductive homogeneous spaces*, Amer. J. Math, **123** (2001), 525-550.
- [21] M. Koecher, *Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras I*, Amer. J. Math. **90** (1968), 476-510.
- [22] M. Koecher, *Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras II*, Amer. J. Math. **89** (1967), 787-816.
- [23] M. Koecher, *On Lie algebras defined by Jordan algebras*, Lecture Notes Series N 8, Århus Universitet, Danmark, april 1967.
- [24] M. Koecher, *The Minnesota notes on Jordan algebras and their applications*, Lectures notes in Mathematics vol. **1710**, Springer, 1999.
- [25] Y. Kosmann-Schwarzbach, *From Poisson algebras to Gerstenhaber algebras*, Ann. Inst. Fourier **46** (1996) 1241-1272.

- [26] R. Kurdiani, T. Pirashvili, *A Leibniz structure of the second tensor power*, J. Lie Theory, **12** (2002), 583-596.
- [27] K. Liu, *Even (Odd) Roots and Simple Leibniz Algebras with Lie Factor sl_2* , ArXiv: math. RA/0701017v1 31 Dec 2006.
- [28] J. L. Loday, *Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz*, Ens. Math. **39** (1993), 269-293.
- [29] J. L. Loday, *Dialgebras*, in: Dialgebras and related operads, Lectures Notes in Mathematics, vol. 1763, Springer Verlag, 2001, pp. 7-66.
- [30] J. L. Loday, T. Pirashvili, *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology*, Math. Ann. **296** (1993), 139-158.
- [31] K. McCrimmon, *A Taste of Jordan Algebras*, Springer Verlag, 2004.
- [32] K. McCrimmon, *Jordan algebras and their applications*, Bull. of A.M.S., vol. 84, N 4, July 1978, 613-627.
- [33] F. Ongay, *φ -Dialgebras and a Class of Matrix Coquecigrues*, Canadian math. bull., Vol. 50, N 1 (2007), 126-137.
- [34] R. D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*, Dover publications, New York, 1995.
- [35] J. Tits, *Une classe d'algèbre de Lie en relation avec les algèbres de Jordan*, Nederl. Akademic van Wetenschappen, Amsterdam, **65** (1962), 530-535.
- [36] R. Velasquez and R. Felipe, *Quasi-Jordan algebras*, To appear in Comm. in Algebra.